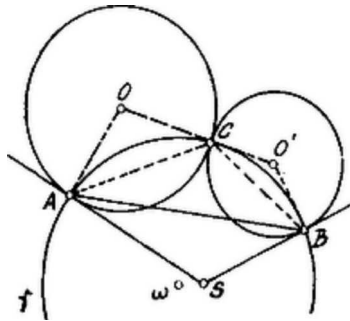


A feladat követelményének megfelelő körök legyenek, ábránk szerint, O és O' . Érintkezési pontjukat, C -t, kössük össze A -val és B -vel. Az OO' centrális a C ponton megy keresztül.



Határozzuk meg az $ABC\angle$ nagyságát:

$$(1) \quad ABC\angle = 180^\circ - (OCA\angle + O'CB\angle) \dots$$

Vegyük figyelembe, hogy az OCA ill. $O'CB$ egyenlőszárú háromszögekben:

$$2OCA\angle = 180^\circ - AOC\angle,$$

ill.

$$2O'CB\angle = 180^\circ - BO'C\angle$$

Így

$$(2) \quad OCA\angle + O'CB\angle = 180^\circ - \frac{1}{2}(AOC\angle + BO'C\angle) \dots$$

Már most az $SAOO'B$ ötszögben a szögek összege $3 \cdot 180^\circ$.

A szögek között A -nál és B -nél derékszögek vannak, úgy hogy

$$(3) \quad AOC\angle + BO'C\angle = 2 \cdot 180^\circ - ASB\angle \dots$$

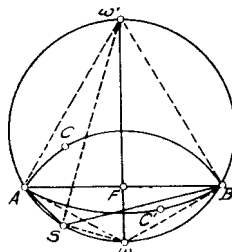
Tekintettel erre, (2)-ben

$$OCA\angle + O'CB\angle = 180^\circ - \frac{1}{2}(2 \cdot 180^\circ - ASB\angle) = \frac{1}{2}ASB\angle$$

és így (1)-ből:

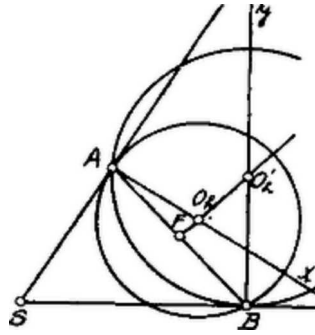
$$ACB\angle = 180^\circ - \frac{1}{2}ASB\angle,$$

azaz az $ACB\angle$ állandó: C mértani helye oly γ kör íve, melynek pontjaiból az AB távolság $ASB\angle$ felének kiegészítő szöge alatt látható!



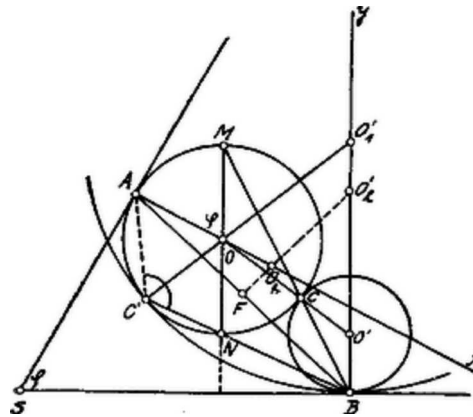
Jegyzet. A γ kör középpontja ω . Minthogy $ACB\angle = 180^\circ - \frac{1}{2}ASB\angle$, ennek megfelelő középponti szög $360^\circ - ASB\angle$ és így $A\omega B\angle = ASB\angle$. Ebből következik, hogy A, B, S, ω egy körön fekszenek, melyet az A, S, B pontok határoznak meg. Ha AB -re, felezőpontjában merőlegest állítunk, ezen merőleges az (A, S, B) kört az ω és ω' pontokban metszi. ω a kör azon ívén fekszik, amelyiken S , és $S\omega$ felezi az $ASB\angle$ mellékszögét (az $ASB\triangle$ külső szögfelezője) $S\omega$ felezi az $ASB\angle$ -et. (Steiner Iván.)

Az 1204. gyakorlatban az $ASB\angle$ szárai egy e egyenesbe esnek. Az ott szereplő O és O' körök között csakis *külső* érintkezés lehetséges. Feladatunk ezeknek megfelelő körökre vonatkozik. Amíg az 1204. gyakorlatban O és O' befut-hatják az e egyenesre állított Ax ill. By merőlegeseket és bármely helyzetük mellett csak külső érintkezés lehetséges, a szóbanforgó esetünkben a viszonyok másképpen is alakulhatnak.



Állítsunk az $ASB \angle$ AS szára az A pontban, a BS szára a B pontban merőlegest, Ax -et ill. By -t. Az AB távolság F felezőpontjában állítsunk AB -re merőlegest; ez a By -t O'_h -ben, Ax -et az O_h -ban metszi. ¹ O'_h oly kör középpontja, mely SB -t a B pontban érinti és keresztülmegy A -n. Már most azon kör, mely SA -t A -ban érinti és az (O'_h) kört is érinti, csak az A pontba zsugorodott kör lehet. (A C pont az A -ba esik!)

Hasonlóan O_h oly kör középpontja, mely SA -t az A -ban érinti és keresztülmegy a B ponton. Azon kör, mely SB -t B -ben érinti és az (O_h) kört is érinti, csak a B pontba zsugorodott kör lehet. (A C pont a B -be esik).



Eszerint az (O) kör O középpontja az Ax egyenesnek AO_h darabját, az (O') kör O' középpontja a By egyenesnek BO'_h darabját futhatja be.

Ha O ill. O' az AO_h darabon, ill. BO_h darabon kívül esik, akkor is lesznek a feltételnek megfelelő körök, csak hogy *belső* érintkezéssel. Ilyen körök C' érintkezési pontjai azon kör ívén fekszenek, melynek középpontja ω' . Ezen esetekben

$$AC'B \angle = 90^\circ + \frac{\varphi}{2} \quad \text{és} \quad A\omega'B \angle = 180^\circ - \varphi.$$

(Ádám László).

Az összetartozó O és O' körök szerkesztése a következőképpen történhetik: az Ax egyenesen tetszőlegesen $(O_h$ -n belül) felvett O pontból megrajzoljuk az OA sugarú (O) kört. Az O ponton keresztül SB -re merőleges MN átmérőt húzunk; BM az (O) kört a C , BN pedig a C' pontban metszi. C az O és O' , C' az O és O'_1 körök hasonlósági pontja. OC a By -t az O' , OC' a By -t az O'_1 pontban metszi. $O'B$ sugarú kör SB -t a B , az (O) kört a C pontban érinti. Az O'_1B sugarú kör az SB -t a B -ben, az (O) kört a C' -ben érinti. ²

Az $AC'B \angle \equiv AC'N \angle$. Utóbbi az (O) körben oly kerületi szög, mely az $\widehat{NMA}$ ívhez tartozik. Azonban $\widehat{NMA} = 180^\circ + \varphi$; ugyanis $\widehat{NM} = 180^\circ$ és $\widehat{MA}$ ív az AOM középponti szögnek felel meg. De $AOM \angle = ASB \angle$, mert száraik megfelelően merőlegesek egymásra.

Az $ASB \angle$ -et felező egyenes az Ax -et, ill. By -t oly kör középpontjában metszi, mely az ASB szög szarait érinti. Az első esetben az (O) körhöz tartozó egyik (O') kör az SB egyenes, a második esetben az (O') körhöz tartozó egyik (O) kör az SA egyenes. (Belső érintkezés!)

¹ A h index határhelyzetet jelent.

² Ha az O'_1 körből indulunk ki, azaz keresünk olyan O kört, mely SA -t az A -ban érinti és (O'_1) -t is érinti, ilyen kettő lesz: az egyik az O , a másik azonban az $ASB \angle$ *szárain kívül* fekszik, és középpontja az ω' körnek az $ASB \angle$ szárain kívül eső részén.