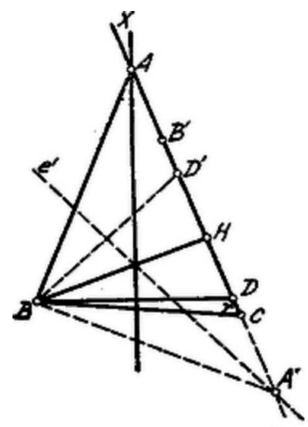
A keresett háromszög legyen az $ABC\,\Delta$ és $b > c$, azaz $\gamma < 90^\circ$ és $b - c < a$.

Az $AC = b$ oldalon felmérjük az $AD = AB = c$ távolságot és B-t összekötjük D-vel. Az így keletkező $ACD\,\Delta$-ben $CD = b - c$, $BC = a$ és az általuk bezárt szög γ ismeretes. Eszerint a $BCD\,\Delta$ megszerkeszthető és ezután az ABD egyenlőszárú háromszög is.



Az adott γ szög egyik szárára felmérjük a $CB = a$ távolságot, a másik szárára, CX-re a $CD = b - c = d$ távolságot. A BD távolságra a felezőpontjában merőleges e egyenest állítunk; ahol e a CX-et metszi, ott lesz a háromszög harmadik csúcsa A.

Az A csúcsnak CX egyenesen CD meghoszszabbítására D-n túl kell esnie. Ha $CD = b - c = d = CH$, ahol H a B-ből CX-re bocsátott merőleges talppontja, akkor $e \parallel CX$ és A a végtelenbe kerül.

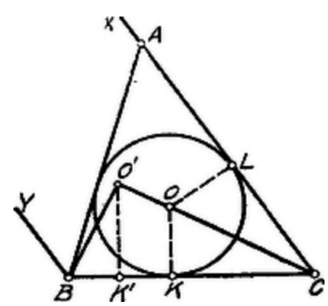
Eszerint a feladatnak nincs megoldása, ha

$$b - c = d \geq CH = a\cos\gamma.$$

Halász Iván (Berzsenyi Daniel g. VI. o. Bp. V.)
Szittyai Dezső (Wagner Manó gimn. IV. o. Rákospalota)

Kiegészítés. Legyen a CX egyenesen $CB' = CB = a$. Ha $CH < d < CB'$, akkor az e egyenes a CX-t a C-n túl fogja metszeni, A'-ben. Az így keletkező $A'BC\,\Delta$-ben a C csúcsnál γ helyett $180^\circ - \gamma$ fekszik és $A'B - A'C = CD' = d$.

$d = CB' = a$ esetben az e egyenes a C csúcson megy keresztül, azaz A' és C összeesnek, háromszög nincs.



II. Megoldás. Az $ABC\,\Delta$-ben legyen $b > c$ és így $\gamma < 90^\circ$. Szerkesszük meg a beirt körét, mely a $BC = a$ oldalt a K pontban érinti. Tudvalevőleg $CK = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Ezen alapon az $ABC\,\Delta$ szerkesztése így végezhető: a megadott $BC = a$ oldalra felmérjük a $CK = \dfrac{a+b-c}{2}$ távolságot és a C-nél a $BCX = \gamma$ szöget. A γ szög felezőjét a BC-re K pontban állított merőleges az O pontban metszi; O a beirt kör középpontja. Az OK sugárral szerkesztett kör CX-et érinti. Ha B-ből e körhöz meghúzzuk a másik érintőt, ez CX-t az A csúcsban metszi.

Dudás Imre (Fazekas Mihály g. VI. o. Debrecen.)

Kiegészítés. A háromszög szerkeszthetőségének első feltétele, hogy $b - c < a$ legyen. Ha $b - c < a$, akkor a K pont B és C közé esik. A másik feltétel, hogy a B pontból az O körhöz húzott második érintő a CX-et messe. Ezen érintő határhelyzete – BY – tehát a CX-hez való párhuzamos helyzet, mely akkor áll elő, ha $BO \perp CO'$. (Ekkor ugyanis $CBO'\sphericalangle = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$ és $CBY\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$.)

Már most ezen határhelyzetben: $BO' = BC\sin\dfrac{\gamma}{2} = a\sin\dfrac{\gamma}{2}$,

$$O'K' = BO'\cos\frac{\gamma}{2} = a\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

és

$$CK' = \frac{a+b-c}{2} = O'K' \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = a \cos^2 \frac{\gamma}{2}$$
$$b - c = 2a \cos^2 \frac{\gamma}{2} - a = a \left(2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 1\right) = a \cos \gamma.$$

Eszerint kell, hogy $b - c < a \cos \gamma$ legyen (és így egyszersmind $b - c < a$).