I. Megoldás. *a)* Ha $\dfrac{x(x+1)}{x-1}>3$, akkor

$$\frac{x(x+1)}{x-1}-3>0, \quad \text{ill.} \quad \frac{x(x-1)-3(x-1)}{x-1}=\frac{x^2-2x+3}{x-1}>0.$$

Azonban $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$ az x bármely értékénél és így akkor van kielégítve az egyenlőtlenség, ha

$$x-1>0, \quad \text{azaz} \quad x>1.$$

b) Ebben az esetben $\dfrac{x(x+1)}{x-1}-6=\dfrac{x(x+1)-6(x-1)}{x-1}=\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}>0.$
Minthogy $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, kell, hogy legyen:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}>0 \quad \text{vagy} \quad (x-2)(x-3)(x-1)>0.$$

Ez bekövetkezik akkor, ha a baloldali tényezők mindegyike pozitív, azaz ha $x>3$, vagy pedig, ha egyik tényező pozitív, a másik kettő negatív. Utóbbi eset akkor áll elő, ha $1<x<2$.[1]

Sándor Gyula (Kölcsey Ferenc rg. VI. o. Bp. VI.)

II. Megoldás. Ábrázoljuk az

$$y=\frac{x^2+x}{x-1}=\frac{x(x+1)}{x-1}$$

függvényt. Ennek oly hiperbola felel meg, melynek egyik aszimptotája az $x=1$ egyenes.

Ha $x=-\infty$, akkor $y=-\infty$. Mindaddig, amíg $x<-1$, $y<0$, $x=-1$ és $x=0$ helyeken $y=0$. A $-1<x<0$ közben $y>0$.

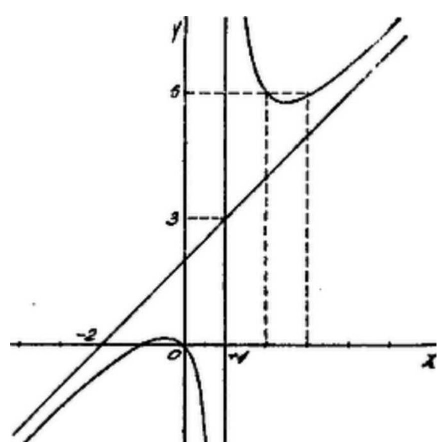
A $0<x<1$ közben $y<0$ és ha x közeledik ezen közben az 1-hez, y a $-\infty$ felé tart.

Ha $x>1$, akkor $y>0$, még pedig $+\infty$-től csökken egy bizonyos értékig, azután a $+\infty$ felé tart.

A függvény ábrázolására szolgáljon a következő értéktáblázat:

x	$-\infty$	$\dots$	-3	-2	-1	$-0{,}42$	0	0,5	$+1$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-1{,}5$	$-\frac{2}{3}$	0	0,17 max	0	$-2{,}5$	$-\infty$

$+1$		2	2,41	3	4	$\dots$	$+\infty$
$+\infty$	$\searrow$	6	5,83 min	6	$\frac{20}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$



[1] Ha $x<1$, mindegyik tényező negatív.
Ha $2<x<3$, akkor $x-3<0$, a másik két tényező pozitív.

A grafikonból látjuk, hogy, ha $x > 1$, $y > 3$, mert hiszen y legkisebb értéke $3 + 2\sqrt{2}$.

$$y > 6, \quad \text{ha} \quad 1 < x < 2 \quad \text{és ha} \quad x > 3.$$

Amigo György (Izr. rg. VI. o. Debrecen).

Kiegészítés. x minden értékéhez – az $x = 1$ helyet kivéve – tartozik egy – és csakis egy y érték. Megfordítva: nem minden y értékhez tartozik x érték.

Rendezzük a függvény-kapcsolatot x szerint. A tört eltávolítása után keletkezik:

$$x^2 + (1 - y)x + y = 0.$$

Adott y értékhez akkor kapunk x értéket, ha ezen egyenlet discriminánsa

$$D \equiv (1 - y)^2 - 4y \geq 0, \quad \text{ill.} \quad D \equiv y^2 - 6y + 1 \geq 0.$$

Ha $D = 0$, akkor $x_1 = x_2 = \dfrac{y-1}{2}$.

Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

$D = 0$, ha $y = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Ezen értékek mindegyikéhez egy x érték tartozik. Még pedig $y = 3 - 2\sqrt{2} \sim 0{,}17$, a függvény maximuma[2]; ez akkor áll elő, ha $x \sim -0{,}42$.

$y = 3 + 2\sqrt{2} \sim 5{,}83$, a függvénynek minimuma és ekkor $x \sim 2{,}41$.[3]

Ha már most $3 - 2\sqrt{2} < y < 3 + 2\sqrt{2}$, akkor x nem valós. Más szóval: ha az X-tengellyel párhuzamosan, tőle $3 - 2\sqrt{2}$, ill. $3 + 2\sqrt{2}$ távolságban egyeneseket húzunk, ezek a görbe egy-egy ágát érintik a felső, ill. alsó tetőpontjukban. E két egyenes közötti síkrészen a görbének nincs pontja. A görbe pontjai csak az $y \leq 3 - 2\sqrt{2}$ ill. $y \geqq 3 + 2\sqrt{2}$ értékekhez tartoznak.

Az $(x = 1, y = 3)$ pont a görbe középpontja. Ezen ponton keresztül húzható a hiperbola másik aszimptotája, mely az X-tengelyhez 45°-ú szög alatt hajlik.

[2]Felső tetőpont a görbe azon ágán, mely az $x = 1$ egyenestől balra fekszik.

[3]Alsó tetőpont a görbe másik ágán.