

Az egyenletben szereplő négyzetgyökök megállapodás szerint mindig csak egy értéket, a pozitívet jelentik. Négyzetre emelve mindkét oldalon:

$$2x + 3 + 5x + 1 + 2\sqrt{(2x + 3)(5x + 1)} = 12x + 13.$$

Összevonás után:

$$(1) \quad 2\sqrt{(2x + 3)(5x + 1)} = 5x + 9 \dots$$

Hangsúlyozva azt, hogy $5x + 9 > 0$, ismét négyzetre emelünk:

$$(2) \quad 40x^2 + 68x + 12 = 25x^2 + 90x + 81 \quad \text{ill.} \quad 15x^2 - 22x - 69 = 0 \dots$$

Ezen egyenlet discriminánsa: $4(121 + 69 \cdot 15) = 4 \cdot 1156 = (2 \cdot 34)^2$.

A (2) gyökei:

$$x_1 = \frac{22 + 68}{30} = 3, \quad x_2 = \frac{22 - 68}{30} = -\frac{23}{15}.$$

Meg kell vizsgálnunk, kielégítik-e ezen értékek az eredeti irracionális egyenletet?

$x_1 = 3$ megfelel az $5x + 9 > 0$ feltételnek és azon követelménynek is, hogy az eredeti egyenletben a négyzetgyökök jel alatt álló kifejezéseket is pozitívvá teszi:

$$\sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = +3, \quad \sqrt{5 \cdot 3 + 1} = \sqrt{16} = +4, \quad \sqrt{12 \cdot 3 + 13} = \sqrt{49} = +7.$$

Valóban

$$3 + 4 = 7.$$

$x_2 = -\frac{23}{15}$ megfelel az $5x + 9 > 0$ feltételnek, azonban az eredeti egyenletben a négyzetgyökjel alatti kifejezések negatív értékűek:

$$2x_2 + 3 = -\frac{1}{15}, \quad 5x_2 + 1 = -\frac{100}{15}, \quad 12x_2 + 13 = -\frac{81}{15}.$$

A négyzetgyökök eszerint képzetesek és mivel

$$(3) \quad -i\sqrt{\frac{1}{15}} + 10i\sqrt{\frac{1}{15}} = 9i\sqrt{\frac{1}{15}} \dots$$

x_2 a

$$(4) \quad -\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5x + 1} = \sqrt{12x + 13} \dots$$

egyenletet elégíti ki. (x_2 idegen gyök!)

Jakab Károly (kath. gimn. VI. o. magántanuló Kalocsa).

Jegyzet. Több ízben rámutattunk arra, hogy a négyzetgyökös irracionális egyenletből a négyzetreemelés által oly racionális egyenlethez jutunk, amelynek gyökei nem gyökei feltétlenül az eredeti egyenletnek. Ezért minden egyes esetben behelyettesítéssel meg kell győződnünk, hogy a kapott gyök-értékek kielégítik-e az eredeti egyenletet. Megállapíthatjuk továbbá, hogy az idegen gyök mely egyenletnek gyöke?

Ha arra gondolunk, hogy egyenletünket grafikus úton is oldjuk meg, akkor

$$\sqrt{2x + 3}, \quad \sqrt{5x + 1}, \quad \sqrt{12x + 13}$$

csak valós értékeket jelenthetnek, tehát kell, hogy legyen

$$2x + 3 \geq 0, \quad 5x + 1 \geq 0, \quad 12x + 13 \geq 0,$$

azaz az $x \geq -\frac{3}{2}$, $x \geq -\frac{1}{5}$, $x \geq -\frac{13}{12}$ feltételeket kell kielégítenünk. Ez megtörténik, ha $x \geq -\frac{1}{5}$.

Ebből a szempontból tehát a megoldásban szereplő 4) egyenletnek nincs jelentősége.

Néhány megoldásban azon állítás szerepel, hogy „mivel az eredeti egyenlet *elsőfokú*, csak egy megoldása lehet.” Ha az egyenletben x -nek törtfüggvénye vagy irracionális függvénye szerepel, nem beszélünk fokszámról.

Előfordult egyes megoldásokban a következő igazolása annak, hogy $x_2 = -\frac{23}{15}$ is kielégíti az egyenletet. Helyettesítve ugyanis ezen értéket az eredeti egyenletbe, keletkezik:

$$\sqrt{-\frac{1}{15}} + \sqrt{-\frac{20}{3}} = \sqrt{-\frac{27}{5}}.$$

Idáig helyes. *Négyzetre emelve, valóban:* $-\frac{1}{15} + 2\sqrt{\frac{20}{45}} - \frac{20}{3} = -\frac{27}{5}$.

Itt két hiba van. Először: ha $a = b$, akkor $a^2 = b^2$. De ha $a^2 = b^2$, abból $a = \pm b$ következik.

Másodszor:

$$\sqrt{-\frac{1}{15}} = i\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \sqrt{-\frac{20}{3}} = i\sqrt{-\frac{20}{3}},$$

tehát szorzatuk:

$$i^2 \sqrt{-\frac{20}{45}} = -\sqrt{\frac{20}{45}}.$$

Más szóval: a négyzetgyökök szorzásának azon szabálya, amely szerint „gyökjel alatt szorzunk”, nem érvényes akkor, ha a négyzetgyökök imaginárius számokat jelentenek.