

1⁰. A számok képezésének törvénye szerint az n -dik ilyen alakú szám:

$$a_n = (3n - 2)(3n - 1) + 3n = 9n^2 - 6n + 2 = (3n - 1)^2 + 1 = a^2 + 1^2,$$

azaz e számok mindegyike két négyzet összege.

2⁰. Már most szorozzunk két ilyen számot:

$$\begin{aligned}(a^2 + 1)(b^2 + 1) &= a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = (a^2b^2 \pm 2ab + 1) + (a^2 \mp 2ab + b^2) = \\ &= (ab \pm 1)^2 + (a \mp b)^2.\end{aligned}$$

Tehát a számsor két tagjának szorzata két négyzet összege.

3⁰. Két négyzet összegét szorozva a számsor bármely tagjával, ismét két négyzetszám összegét nyerjük:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)(a^2 + 1) &= a^2x^2 + a^2y^2 + x^2 + y^2 = \\ &= (a^2x^2 \pm 2axy + y^2) + (a^2y^2 \mp 2axy + x^2) = (ax \pm y)^2 + (ay \mp x)^2.\end{aligned}$$

Ezáltal tételünket teljesen bebizonyítottuk.

Bleyer Jenő (izr rg., VI. o. Debrecen.)

Jegyzet. Általában érvényes, hogy

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \dots (a_n^2 + b_n^2)$$

két négyzet összegéként írható fel. Ezt teljes indukcióval igazolhatjuk. (Jakab K.)