I. Megoldás. Legyen $\sqrt[3]{72-x}=u$ és $\sqrt[3]{16-x}=v$,
tehát

$$72-x=u^3 \quad \text{és} \quad 16-x=v^3.$$

Eszerint:

$$u^3-v^3=56 \tag{1}$$
$$\text{és} \quad u-v=2. \tag{2}$$

Mármost

$$u^3-v^3=(u-v)(u^2+2uv+v^2)=2(u^2+uv+v^2).$$

Ennek tekintetbe vételével (1)-ből:

$$u^2+uv+v^2=28. \tag{1a}$$

(2) alapján $u=v+2$ és ezt helyettesítve ($1a$)-ba, keletkezik

$$(v+2)^2+v(v+2)+v^2=28, \quad \text{ill.} \quad v^2+2v-8=0. \tag{3}$$

A (3) gyökei:

$$v_1=2, \quad v_2=-4.$$

Ezeknek megfelelőleg:

$$u_1=4, \quad u_2=-2.$$

Minthogy

$$x=72-u^3=16-v^3,$$
$$x_1=8, \quad x_2=80.$$

Egyenletünket mind a két x érték kielégíti.

Cser Sándor (Bencés rg. VI. o. Pápa.)

Jegyzet. Az ($1a$) egyenlet írható így is: $(u-v)^2+3uv=28$. Minthogy $u-v=2$, keletkezik $uv=8$ ill. $-uv=-8$. Felfoghatjuk úgy, hogy keresnünk kell két számot, u-t és $-v$-t, ha összegük 2 és szorzatuk -8. Eszerint u és $-v$ a

$$z^2-2z-8=0$$

egyenletnek gyökei. Azaz, ha

$$z_1=u=4, \quad \text{akkor} \quad z_2=-v=-2, \quad \text{tehát} \quad v=2,$$

és ha

$$z_2=u=-2, \quad \text{akkor} \quad z_1=-v=4, \quad \text{tehát} \quad v=-4.$$

II. Megoldás. Az adott egyenlet mindkét oldalán köbre emelve, keletkezik:

$$72-x-3\sqrt[3]{(72-x)^2}\sqrt[3]{16-x}+3\sqrt[3]{72-x}\sqrt[3]{(16-x)^2}-16+x=8.$$

Összevonás, egyszerűsítés után:

$$\sqrt[3]{(72-x)(16-x)}\left(\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}\right)=16,$$

ill.

$$\sqrt[3]{(72-x)(16-x)}=8, \quad \text{vagy} \quad (72-x)(16-x)=8^3=512.$$

A kijelölt műveletek végrehajtása és rendezés után:

$$x^2-88x+640=0; \quad \text{innen} \quad x_1=8, \quad x_2=80.$$

Fekete András (Fazekas Mihály r. VI. o. Debrecen.)