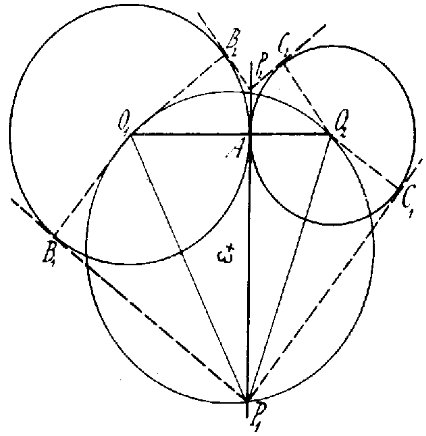
1°. Az adott körök középpontjai O_1 és O_2; közös A pontjukban húzott érintőnek P_1 pontja feleljen meg a követelménynek, azaz az O_1 körhöz húzott P_1B_1 érintő merőleges az O_2 körhöz vont P_1C_1 érintőre. P_1O_1 felezi a $B_1P_1A\sphericalangle$-et és P_1O_2 a $C_1P_1A\sphericalangle$-et és így

$$O_1P_1O_2\sphericalangle = \frac{B_1P_1A\sphericalangle + C_1P_1A\sphericalangle}{2} = \frac{90°}{2} = 45°.$$



Eszerint P_1 oly kör ívén fekszik, melynek pontjaiból az O_1O_2 távolság, mint húr 45°-ú szögek alatt látható. Ilyen kör kettő van és középpontjuk az O_1O_2 oldalú négyzet középpontja.[1] Ezen körök egyike az A pontban emelt érintőt két pontban metszi: P_1 és P_2-ben. Az $O_1P_2O_2\sphericalangle = 135°$ és ezért a P_2B_2 érintő is merőleges a P_2C_2 érintőre. Ugyanis $P_2O_1O_2\sphericalangle + P_2O_2O_1\sphericalangle = 45°$, tehát

$$B_2O_1O_2\sphericalangle + C_2O_2O_1\sphericalangle = 2(P_2O_1O_2\sphericalangle + P_2O_2O_1\sphericalangle) = 90°;$$

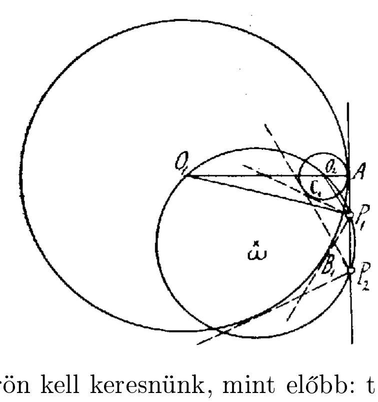
ebből következik, hogy $O_1B_2 \perp O_2C_2$, ennélfogva $P_2B_2 \perp P_2C_2$. Eszerint P_2 is megfelel a követelményeknek. A másik kör az előbbivel O_1O_2-re nézve szimmetrikus helyzete és szintén két pontot szolgáltat. Összesen tehát 4 pont felel meg a követelményeknek, külső érintkezés esetén mindenkor.

2°. Ha az O_1 és O_2 körök között belső érintkezés van, akkor a feltételeknek megfelelő P_1 pontra nézve

$$O_1P_1O_2\sphericalangle = O_1P_1A\sphericalangle - O_2P_1A\sphericalangle.$$

Azonban

$$O_1P_1A\sphericalangle = \frac{B_1P_1A\sphericalangle}{2} = \frac{B_1P_1C_1\sphericalangle + C_1P_1A\sphericalangle}{2} = \frac{90° + 2O_2P_1A\sphericalangle}{2},$$
$$O_1P_1A\sphericalangle = 45° + O_2P_1A\sphericalangle \quad \text{és így} \quad O_1P_1O_2\sphericalangle = 45°.$$



Eszerint a P pontokat ugyanolyan körön kell keresnünk, mint előbb: t. i. az O_1O_2 oldalú négyzet köré írt körön. Ezen kör radiusa:

$$\varrho = \omega O_1 = \omega O_2 = O_1O_2\frac{\sqrt{2}}{2} = (r_1 - r_2)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$[2]

Ezen körnek és az A pontban emelt közös érintőnek csak akkor van közös pontja, ha

$$\varrho \geqq \frac{O_1O_2}{2} + O_2A \quad \text{azaz} \quad \varrho \geqq \frac{r_1 - r_2}{2} + r_2$$
$$\varrho \geqq \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

[1] Ilyen négyzetet az O_1O_2 mindegyik oldalára szerkeszthetünk.

[2] ω kör kettő van, O_1O_2-re szimmetrikus helyzetében.

Tekintettel arra, hogy $\varrho = (r_1 - r_2)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, P pont létezésének feltétele;

$$(r_1 - r_2)\frac{\sqrt{2}}{2} \geqq \frac{r_1 r_2}{2} \quad \text{tehát} \quad r_1 \geqq r_2\left(1+\sqrt{2}\right)^2.$$

Ha $r_1 > r_2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ akkor 4 pont található a feltételeknek megfelelőleg.

Ha $r_1 = r_2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$ akkor 2 pont felel meg a feltételeknek. (T. i. az ω_1 és ω_2 körök érintik az A pontban húzott közös érintőt.)

Ha $r_1 < r_2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$, akkor nem található az A pontban emelt érintőn a követelménynek megfelelő P pont.

Blau Kata (áll. leánygimn. VII. o. Szeged)