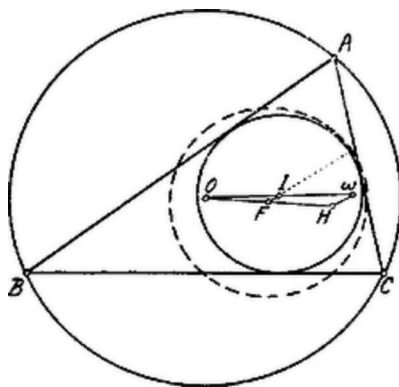


r_k jelentse az $ABC\triangle$ köré, r_b pedig oly kör sugarát, mely a háromszög oldalait érinti. ¹ Jelentse O az előbbi, I az utóbbi kör középpontját. Ekkor az $OI = d$ távolságra és az r_k , r_b sugarakra nézve fennáll az Euler-féle összefüggés: ²

$$d^2 = r_k^2 \pm 2r_k r_b.$$

A jobboldalon $+$ érvényes, ha a második kör a háromszög oldalait kívülről, a $-$ jel, ha belülről érinti.

Ha már most az adott két kör középpontjainak d távolsága eleget tesz az Euler-féle összefüggésnek, akkor végtelen sok olyan háromszög létezik, mely az r_k sugarú körbe és az r_b sugarú kör köré van írva. Ha azonban d értéke nem felel meg az Euler-féle összefüggésnek, akkor nem létezik ilyen háromszög. ²

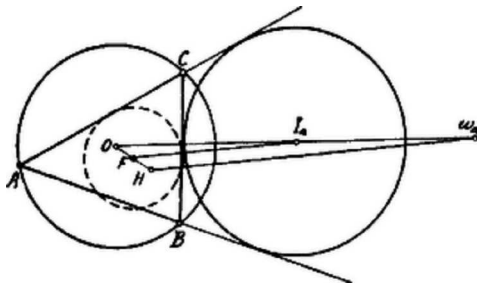


Legyen már most az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontja O , a beírt kör középpontja I , magassági pontja H és az OH távolság felezőpontja F , a háromszög Feuerbach-körének középpontja. Ezen kör sugara tudvalevőleg $\frac{1}{2}r_k$. A Feuerbach kört az $ABC\triangle$ -be írt kör belülről érinti.

E két kör centrális

$$FI = \frac{1}{2}r_k - r_b. \quad ^3$$

Vegyük fel az OI egyenesen az O -val I -re nézve szimmetrikus pontot ω -t, azaz $O\omega = 2OI$.



Mint hogy $OH = 2OF$, nyilván

$$\omega H = 2FI = r_k - 2r_b,$$

azaz a H magassági pont oly kört ír le, melynek középpontja a szilárd ω pont és sugara $r_k - 2r_b$.

Ha I_j oly kör középpontja, mely a háromszög oldalait kívülről érinti, akkor a Feuerbach-kör a háromszög ezen hozzáírt körét kívülről érinti. Most tehát

$$FI_j = \frac{1}{2}r_k + r_b \quad \text{és} \quad \omega_j H = 2FI_j = r_k + 2r_b,$$

ha t. i. ω_j és O és az I_j -re szimmetrikus pontok. ($j = a, b, c$).

Bármelyik esetben, az Euler-féle összefüggés alapján

$$\omega H = \frac{d^2}{r_k},$$

ahol $d = OI$ vagy OI_j .

¹ A kör köré írt háromszög oldalai a kör érintői. A kör a háromszögre nézve beírt kör vagy hozzáírt kör.

² L. KÜRSCHÁK: Matematikai Versenytételek c. műben, a 33. oldalon.

³ $r_k > 2r_b$!