

A szóbanforgó egyenlőtlenség helyességét arra az esetre mutatjuk ki, ha $\frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} < \frac{\pi}{2}$.

Az egyenlőtlenség baloldalán álló törtet, a rövideg kedvéért jelölje A .
Nyilván

$$(1) \quad A = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \beta) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)} \quad \text{és} \quad A : \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha)} \cdot \frac{\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \beta)}{\frac{1}{2}(\gamma - \beta)}}{\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}}$$

Az (1) jobboldalát csökkentjük, ha a számlálót csökkentjük és a nevezőt növeljük azáltal, hogy

$$(2) \quad \cos h < \frac{\sin h}{h} < 1 \dots$$

alapján $\frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma - \beta)}{\frac{1}{2}(\gamma - \beta)}$ helyett a nála kisebb $\cos \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$ -t és $\frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha)}$ helyett 1-et írunk. Eszerint

$$(3) \quad A : \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} > \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \beta) \cos \frac{1}{2}(\gamma - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha)} = \frac{(\sin \gamma + \sin \beta)}{2 \sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha)}$$

Az 1487. feladatban foglaltak szerint $\sin \gamma + \sin \beta > \frac{2}{\pi}(\gamma + \beta)$; továbbá (2) szerint $2 \sin \frac{1}{2}(\beta + \alpha) < \beta + \alpha$, úgy, hogy

$$(4) \quad A : \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\gamma + \beta}{\beta + \alpha} \quad \text{ill.} \quad A > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\gamma + \beta}{\beta + \alpha} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} \dots$$

Azonban $\frac{\gamma + \beta}{\beta + \alpha} > 1$ és feltevésünk szerint $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} < 1$
tehát

$$\frac{\gamma + \beta}{\beta + \alpha} > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}$$

és így

$$(5) \quad A > \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} \right)^2 \dots$$

Taksony György (ág. ev. g. VIII. o. Bp.).

Jegyzet. A (4)-ből (5)-höz jutunk akkor is, ha

$$\frac{\gamma + \beta}{\beta + \alpha} > \frac{2}{\pi} \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} \quad \text{azaz} \quad \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} < \frac{\pi}{2} \frac{\gamma + \beta}{\beta + \alpha}.$$

Ez a $\frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}$ tört értékére nagyobb közt enged.

A feladatot más korrekciókkal megoldották: Jakab K., Klein J., Sándor Gy.

Jegyzet. Az 1488. és az előbbi feladat sajtóhibával került ki. Ezekben bizonyos becslés került meg nem felelő alakban kifejezésre. A helyes tétel, melyet megoldásával közlünk, a következő:

Legyen $0 < \alpha < \beta < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{\cos \beta - \cos \gamma}{\cos \alpha - \cos \beta} > \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}.$$

Megoldás. Legyen $\gamma - \beta = \delta_1$, $\beta - \alpha = \delta_2$. Vizsgáljuk az

$$f(\beta) = \frac{\cos \beta - \cos(\beta + \delta_1)}{\cos(\beta - \delta_2) - \cos \beta}$$

függvény változását, miközben δ_1 és δ_2 -t állandónak tekintjük.

β változik δ_2 -től $\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)$ -ig: $\delta_2 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} - \delta_1$ ¹

Ugyanis

$$\delta_1 + \delta_2 = \gamma - \alpha < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Hogy $f(\beta)$ változását ismerjük, állapítsuk meg $f'(\beta)$ előjelét az előbb jelzett intervallumban.

$$f(\beta) = \frac{2 \sin\left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right) \sin \frac{\delta_1}{2}}{2 \sin\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right) \sin \frac{\delta_2}{2}}.$$

$\frac{\sin \frac{\delta_1}{2}}{\sin \frac{\delta_2}{2}}$ állandó, pozitív szám; tehát

$$\begin{aligned} \text{sign } f'(\beta) &= \text{sign } \frac{d}{d\beta} \frac{\sin\left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right)} = \\ &= \text{sign} \left[\sin\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right) \cos\left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right) - \sin\left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right) \cos\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right) \right] =^2 \\ &= \text{sign} \sin \left[\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right) - \left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right) \right] = -\text{sign} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = -1.^3 \end{aligned}$$

Eszerint $f(\beta)$ állandóan csökken, miközben növekszik δ_2 -től $\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)$ -ig, azaz $f(\beta)$ legkisebb értékét a $\frac{\pi}{2} - \delta_1$ helyen kapjuk. Tehát

$$\begin{aligned} f(\beta) &\geq \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 + \delta_1\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 - \delta_2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)} \\ f(\beta) &\geq \frac{\sin \delta_1}{\sin(\delta_1 + \delta_2) - \sin \delta_1} = \frac{\sin \delta_1}{2 \sin \frac{\delta_2}{2} \cos\left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{2}\right)}. \end{aligned}$$

A tört értékét kisebbítjük, ha 1) számlálóját kisebbítjük, azaz az 1487. feladat eredménye szerint $\sin \delta_1$ helyett $\frac{\pi}{2} \delta_1$ -t vesszük, 2) nevezőjét növeljük azáltal, hogy $\sin \frac{\delta_2}{2}$ helyett $\frac{\delta_2}{2}$ -t és $\cos\left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{2}\right)$ helyett 1-et írunk:

$$f(\beta) > \frac{\frac{\pi}{2} \delta_1}{\frac{\delta_1}{2}} = \frac{2 \delta_1}{\pi \delta_2} = \frac{2 \gamma - \beta}{\pi \beta - \alpha}.$$

¹ Az egységsugarú kör első negyedén jelöljük ki az α , β , γ ívek végpontjait, A , B , C -t: $\widehat{AB} = \beta - \alpha = \delta_2$ és $\widehat{BC} = \gamma - \beta = \delta_1$. A B pont a kör negyedívén két határ között mozoghat, ha δ_2 és δ_1 ívkülönbségek állandók. E határpontok egyike, ha A -t levisszük ($\alpha = 0$) az X tengelyre, δ_2 ív végpontja; a másik határpont, ha C az Y tengelyre kerül ($\gamma = 90^\circ$), a $\frac{\pi}{2} - \delta_1$ nagyságú ív végpontja.

² $f'(\beta)$ nevezője pozitív.

³ $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} < \frac{\pi}{2}$.