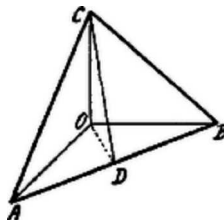


A tetraéder térfogata: $\frac{1}{3}(AOB) \cdot OC = \frac{a^2 x}{6}$.

A tetraéder felszíne $F = (AOB) + 2(AOC) + (ABC) = \frac{a^2}{2} + ax + (ABC)$.

Húzzunk a C csúcsból AB -re merőlegest, CD -t.



Nyilván $OD = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$(ABC) = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \sqrt{x^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{2x^2 + a^2}.$$

Eszerint $F = \frac{a^2}{2} + ax + \frac{a}{2} \sqrt{2x^2 + a^2}$.

A feladat követelménye:

$$\frac{a^2 x}{6} = \frac{m}{3} \left(\frac{a^2}{2} + ax + \frac{a}{2} \sqrt{2x^2 + a^2} \right).$$

Az egyenlet minden tagja osztható a -val. A törtek eltávolítása és a kijelölt műveletek elvégzése után keletkezik

$$(1) \quad (a - 2m)x - am = m\sqrt{2x^2 + a^2} \dots$$

Négyzetre emelve mindkét oldalon és rendezve:

$$(2) \quad \left[(a - 2m)^2 - 2m^2 \right] x^2 - 2am(a - 2m)x = 0 \dots$$

A (2) egyik gyöke: $x = 0$. Ez nem elégíti az (1)-t, mert $x = 0$ helyettesítés után $-am = am$, ellenmondás áll elő, ha $m \neq 0$.¹

A (2) másik gyöke

$$(3) \quad x = \frac{2am(a - 2m)}{(a - 2m)^2 - 2m^2} \dots$$

Ez megfelel, ha pozitív és az (1) baloldalát pozitívvá teszi. Utóbbi feltétel azonban nem teljesülhet, ha $a - 2m$ negatív (vagy zérus). Kell tehát, hogy $a - 2m > 0$ ill. $m < \frac{a}{2}$ legyen.

Ha már most $a - 2m > 0$, akkor (3) szerint x pozitív, ha a nevezője

$$(a - 2m)^2 - 2m^2 = (a - 2m + m\sqrt{2})(a - 2m - m\sqrt{2}) \geq 0,$$

vagyis, mivel $a - 2m + m\sqrt{2} > 0$,
kell, hogy

$$(4) \quad a - 2m - m\sqrt{2} \leq 0, \quad \text{azaz} \quad m \leq \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) \dots$$

legyen. Ha x értékét (3) szerint (1) baloldalán helyettesítjük:

$$\frac{2am(a - 2m)^2}{(a - 2m)^2 - 2m^2} - am = \frac{am \left[(a - 2m)^2 + 2m^2 \right]}{(a - 2m)^2 - 2m^2} > 0, \quad \text{ha} \quad m \leq \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}).$$

Eszerint m legnagyobb értéke $m' = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$. Ez azonban az $AOB\Delta$ -be írt kör sugarát jelenti.² Másrészt m az $AOBC$ tetraéderbe írt gömb sugarával egyenlő. Nyilvánvaló, hogy $m < m'$. Ha $m = m'$, akkor $x = \infty$; a tetraéder háromoldalú hasábos térré válik, melyet az $AOB\Delta$ határol. Ezen teret határoló lapokat érintő gömb legnagyobb köre az $AOB\Delta$ -be írt körrel egybevágó.

¹ $x = 0$ esetén, $F = a^2$, azaz $AOB\Delta$ területének kétszerese. Ekkor a tetraéder térfogata = 0, azaz $m = 0$.

² $\varrho = \frac{2t}{2s} = \frac{a^2}{2a + a\sqrt{2}} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.