

Az urnában legalább egy, legfeljebb 3 golyó fehér. (4 fehér golyó esetén mindig fehéret húznánk!)

Ha az urnában csak egy golyó fehér, akkor annak valószínűsége, hogy egy húzásnál fehéret húzunk, $\frac{1}{4}$, hogy nem húzunk fehéret, $\frac{3}{4}$. Hogy $2n$ számú húzásnál éppen n -szer húzunk fehéret, annak valószínűsége ¹

$$v_1 = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n = \binom{2n}{n} \frac{3^n}{4^{2n}}.$$

Ha az urnában 2 fehér golyó van, akkor annak valószínűsége, hogy fehéret húzunk, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, hogy nem húzunk fehéret, szintén $\frac{1}{2}$. Hogy $2n$ számú húzásnál n -szer fehéret, n -szer nem fehéret húzunk, annak valószínűsége

$$v_2 = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

Hasonlóan

$$v_3 = \binom{2n}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \binom{2n}{n} \frac{3^n}{4^{2n}}.$$

Már most annak valószínűsége, hogy a második ok idézte elő az eseményt,

$$v = \frac{v_2}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{\frac{1}{4^n}}{2 \frac{3^n}{4^{2n}} + \frac{1}{4^n}} = \frac{4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n}.$$

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp. V.).

Jakab Károly (VIII. o. magántanuló, Kalocsa).

Jegyzet. Könnyen igazolható, hogy v az n monoton növekvő függvénye; ugyanis

$$\frac{4^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1} + 4^{n+1}} > \frac{4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n}.$$

(Az egyenlőtlenség rendezése erre vezet: $8 \cdot 3^n > 2 \cdot 3^{n+1}$ ill. $8 > 6$).

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = 1$$

mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Ha tehát a húzások száma igen nagy páros szám, akkor a szóbanforgó ok fennállása majdnem bizonyos.

¹Hogy egy bizonyos sorrendben húzunk n fehéret és n nem fehéret, annak valószínűsége $\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n$. A lehetséges sorrendek száma pedig $\frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$.