

I. Megoldás. Ábrázoljuk az $y = \sin x$ függvényt 0 és $\frac{\pi}{2}$ között; a függvény-görbe keresztülmegy a $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ pontokon és a szóban forgó ív alulról konkáv. A két határpontot összekötő húr a görbe íve alatt fekszik (az ív és az X tengely között), e két határpontot összekötő egyenes egyenlete $y = \frac{2}{\pi}x$.

Ha tehát a megadott intervallumban valamely x értékhez tartozó pontot keresünk a sinusgörbén, ill. a szóbanforgó húrján, akkor az előbbi ordinátája (t. i. $\sin x$) nagyobb, mint az utóbbié (t. i. $\frac{2}{\pi}x$); a határpontokban ezen ordináták egyenlők és így, ha

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{akkor} \quad \sin x \geq \frac{2}{\pi}x.$$

Bán Tamás (érseki g. VII. o. Bp. II.)

II. Megoldás. Vizsgáljuk az $y = \frac{\sin x}{x}$ függvény változását a $[0, \frac{\pi}{2}]$ közben. Ezen köz határain:

$$y_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Kimutatjuk, hogy a $[0, \frac{\pi}{2}]$ közben $y = \frac{\sin x}{x}$ állandóan fogy. Ugyanis

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}.$$

A $[0, \frac{\pi}{2}]$ közben $\cos x > 0$, míg $x - \operatorname{tg} x < 0$, tehát $y' < 0$. Eszerint az $y = \frac{\sin x}{x}$ függvény értéke a szóbanforgó közben 1-től fogy $\frac{2}{\pi}$ -ig és így valóban

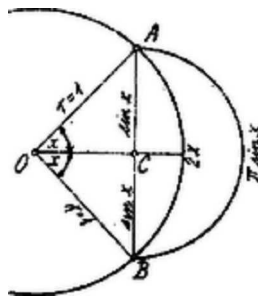
$$(Q.e.d.) \quad \frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi} \quad \text{azaz} \quad \sin x \geq \frac{2}{\pi}x.$$

Josepovits Gyula (Könyves Kálmán g. VII o. Ujpest.)

Jegyzet. Hasonlóan vizsgálhatjuk az $y = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ függvény változását is. Erről kiderül, hogy a $[0, \frac{\pi}{2}]$ köz határain 0 , a közben mindenütt pozitív.

(Taksony Gy.)

III. Megoldás. Az egység sugarú körben $2x$ ívhez tartozó húr hossza $2 \sin x$; feltesszük, hogy $0 \leq 2x \leq \pi$. Ezen húr felével, a húr középpontjából szerkesztett félkör hossza $\pi \sin x$.



Két ponton (A és B) átmenő körök ívei legyenek i_1, i_2 . Ha i_1 középpontja a két pont távolságát merőlegesen felező egyenesen messzebb van a C felezőponttól, mint i_2 -é, akkor i_1 az AB és i_2 között fekszik. Az adott esetben tehát az egységsugarú kör $2x$ íve az $\frac{1}{2}AB$ sugarú $\pi \sin x$ íven belül fekszik.

Ha azonban két pontot két állandóan konvex törtvonal köt össze, akkor ezek közül a belső rövidebb. Ugyanez áll két állandóan konvex görbe vonalra is. Ebből következik, hogy

$$\pi \sin x > 2x \quad \text{ill.} \quad \sin x > \frac{2}{\pi}x.$$

Ha $x = 0$, vagy $x = \frac{\pi}{2}$, akkor a két görbe ív összeesik; ezen határesetekben tehát $\sin x = \frac{2}{\pi}x$.

Relle Ferenc (Révai Miklós g. VII. o. Győr.)