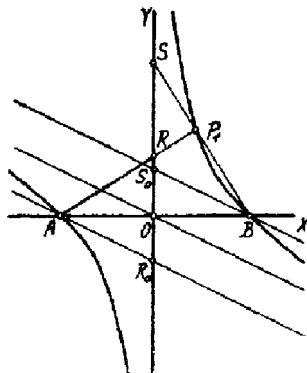


Derékszögű koordinátarendszerünk X -tengelye legyen az AB , Y -tengelye az e egyenes. Az A koordinátái $(-d, 0)$, a B ponté $(d, 0)$. A változó R pont koordinátái $(0, \lambda)$, az S ponté $(0, \lambda + d)$.



Az AR egyenes egyenlete:

$$(1) \quad y = \frac{\lambda}{d}(x + d) \dots$$

A BS egyenes egyenlete:

$$(2) \quad y = -\frac{\lambda + d}{d}(x - d) \dots$$

A két egyenes metszéspontjának koordinátáit két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása szolgáltatja, mint a λ paraméter függvényeit. Ha a két egyenletből λ -t kiküszöböljük, a metszéspont koordinátái között összefüggést kapunk; ez lesz a keresett mértani hely egyenlete.

1)-ből $\lambda = \frac{dy}{x + d}$. Ha ezt 2)-be helyettesítjük:

$$(3) \quad y = -\frac{1}{d} \left(\frac{dy}{x + d} + d \right) (x - d) \quad \text{ill.} \quad (x + d)y = -(y + x + d)(x - d) \dots$$

A kijelölt műveletek végrehajtása és összevonása után keletkezik:

$$(4) \quad x^2 + 2xy = d^2 \dots$$

Nyilvánvalóan hiperbolával van dolgunk, melynek középpontja az origó, keresztülmegy az A és B pontokon,¹ és aszimptotái az

$$(5) \quad x^2 + 2xy \equiv x(x + 2y) = 0 \dots$$

egyenespárt alkotják. Eszerint a hiperbola egyik aszimptotája az $x = 0$ egyenes, azaz az Y -tengely, a másik aszimptotája az $x + 2y = 0$ egyenes. (Ennek irányhatározója $-\frac{1}{2}$!)

Ha R az O pontban van. ($\lambda = 0$), akkor AR a BS -t a B pontban metszi. ($P \equiv B$).

Ha S van az O pontban ($\lambda = -d$), akkor AR és BS metszéspontja, $P \equiv A$.

Ha R a végtelenbe jut az Y -tengelyen, akkor AR és BS párhuzamosak az Y -tengellyel; P az Y -tengely végtelenben fekvő pontja.

Ha $\lambda = -\frac{d}{2}$, azaz O felezi az RS távolságot, akkor AR és BS párhuzamosak és irányhatározójuk: $-\frac{1}{2}$ AR és BS metszéspontja a végtelenben van oly egyenesen, melynek irányhatározója: $-\frac{1}{2}$.

Jelölje az R , S pontok helyzetét az utóbbi esetben $R_0 \left(0, -\frac{d}{2}\right)$, $S_0 \left(0, \frac{d}{2}\right)$. Ha R leírja az Y -tengelynek az R_0 feletti részét $\left(\lambda > -\frac{d}{2}\right)$, a P pont leírja a hiperbola azon ágát, mely az X -tengely pozitív oldalán van; ha pedig R az Y -tengelyen R_0 -tól $-\infty$ felé tart, akkor a P pont leírja a hiperbola másik ágát, amely t. i. az X -tengely negatív oldalán van.

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp. V.)

¹ $(-d, 0)$ és $(d, 0)$ kielégítik a (4) egyenletet!

²Ha $\lambda = -\frac{d}{2}$, akkor az (1) egyenlet átmegy ebbe: $y = -\frac{1}{2}(x + d)$, míg a (2) ebbe: $y = -\frac{1}{2}(x - d)$.

Jegyzet. a) Ha az (1) és (2) egyenletek rendszerét x , y szerint megoldjuk:

$$x = \frac{d^2}{2\lambda + d}, \quad y = 2\lambda \frac{\lambda + d}{2\lambda + d}.$$

Ezen paraméteres előállításból kiolvashatók a megállapítások, amelyeket a görbe helyzetére tettünk.

b) Az aszimptoták helyzetét ismerve, megszerkeszthetjük a főtengelyeket.

c) Ha az RS távolságnak felső végpontja R , akkor a P pont az

$$x^2 - 2xy = d^2$$

görbét írja le. Ennek aszimptotái az $x = 0$ és $x - 2y = 0$ egyenesek.