

Állapítsuk meg a nevező zérus helyeit. $2x^4 + x^2 - 1 = 0$, ha $x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$. Valós x értékeket szolgáltat

$$x^2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sim \pm 0,707.$$

Eszerint a függvénynek $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ helyeken szakadása van; minden más helyen $-\infty$ és $+\infty$ között a függvény folytonos.

A függvény változásának megállapítására számítsuk ki differenciálhányadosát:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x^4 + x^2 - 1)(8x^3 + 16x) - (2x^4 + 8x^2 + 3)(8x^3 + 2x)}{(2x^4 + x^2 - 1)^2} = \\ &= -2x \frac{14x^4 + 16x^2 + 11}{(2x^4 + x^2 - 1)^2} = -2xg(x). \end{aligned}$$

$g(x)$ oly törtet jelez, mely x minden értékénél pozitív. Ugyanis a számláló x^2 másodfokú függvénye, melynek discriminánsa $16 - 4 \cdot 14 \cdot 11 < 0$, tehát előjele állandó és megegyezik x^4 együtthatójának előjelével. A nevező is pozitív; a fenti x_1 és x_2 helyeken eltűnik, úgy, hogy x_1 helyen $y' = +\infty$, míg x_2 helyen $y' = -\infty$.

$y' = 0$ az $x = 0$ helyen és itt pozitív értékekből megy át negatív értékekbe, tehát $x = 0$ helyen a függvénynek maximuma van és $y_{\max} = -3$.

$$y' > 0, \quad \text{ha} \quad x < 0 \quad \text{és} \quad y' < 0, \quad \text{ha} \quad x > 0.$$

Ha $x \rightarrow \pm\infty$, akkor $y \rightarrow 1$ és $y' = 0$; az $y = 1$ egyenes a görbének aszimptotája, az X -tengely mindkét oldalán.

Mint hogy a függvényben x -nek csak páros kitevőjű hatványai szerepelnek, a függvény értéke $+x$ és $-x$ helyeken egyenlő: a görbe az Y tengelyre nézve szimmetrikus. A két szakadási helyen az $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenesek szintén aszimptoták. A görbe tehát három ágból áll.

A függvény változását feltüntető táblázat:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'	0	+	$+\infty$	+	0	-	$-\infty$	-	0
y	1	$\nearrow$	$+\infty -\infty$	$\nearrow$	$-3_{\max}$	$\searrow$	$-\infty +\infty$	$\searrow$	1

