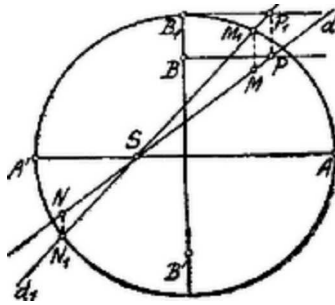


Az ellipszist, melynek főténgelyei $2a$, $2b$ (és $a > b$), mint az a sugarú kör affin transzformációját fogjuk fel. A transzformáció tengelye az ellipszis nagy tengelye, AA' , karakterisztikája $\frac{a}{b}$. ($OA = a$, $OB = b$; a B pont a főkör B_1 pontjának transzformációja).



Messe a d egyenes AA' -t az S pontban. B ponton át AA' -vel párhuzamosan vont egyenes d -t a P -ben metszi. A B_1 ponton át AA' -vel párhuzamost húzunk; a P ponton át pedig erre merőleges vetítő sugarat. Ez meghatározza rajta a P_1 pontot. Már most S és P_1 pontok meghatározzák azon d_1 egyenest, melynek affin-transzformációja d . A d_1 egyenes az OA sugarú főkört az M_1 és N_1 pontokban metszi. Ezekből AA' -re merőleges vetítő sugarakat állítunk; a vetítősugarak a d egyenest a keresett M és N pontokban metszik. Ezek lesznek az ellipszis és a d egyenes metszéspontjai.

Legyen O vetülete d_1 -n Q . A szerkesztés lehetséges, ha $OQ \leq a$. Az SOQ derékszögű háromszögben: $OQ = OS \sin \alpha_1$ ha α_1 a d hajlásszöge az $A'A$ tengelyhez. Jelölje a α a d hajlásszögét az $A'A$ tengelyhez. A definíció szerint

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a}{b} \quad \text{és} \quad \sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}.$$

Már most

$$OStg \alpha_1 \leq a\sqrt{1 + tg^2 \alpha_1}.$$

$$OStg \alpha \frac{a}{b} \leq a\sqrt{1 + tg^2 \alpha \cdot \frac{a^2}{b^2}} \quad \text{és innen} \quad \overline{OS}^2 \leq b^2 \cotg^2 \alpha + a^2.$$

Eszerint adott α hajlásszögű d egyenesre nézve a metszéspont létezésének feltétele:

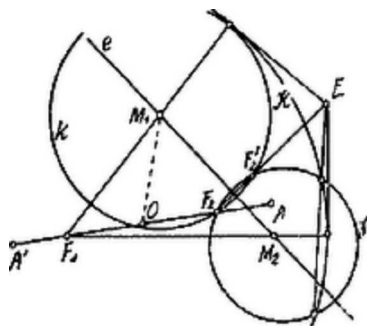
$$-\sqrt{a^2 + b^2 \cot^2 \alpha} \leq OS \leq \sqrt{a^2 + b^2 \cot^2 \alpha}.$$

Kovács Illés (Fazekas Mihály g. VII. o. Debrecen.).

II. Megoldás. A főtengelyek segítségével meghatározhatjuk az ellipszis gyújtópontjainak, F_1 és F_2 helyét is. Vegyük tekintetbe továbbá az ellipszis egyik K vezérkörét, melynek középpontja F_1 sugara $2a$.

Az ellipszis mértani helye azon k körök középpontjainak, amelyek az F_2 -n kerestülmennek és K -t (belülről) érintik.

Feladatunk most már az, hogy oly k kört határozzunk meg, melynek középpontja az e egyenesen fekszik. Ilyen k kör keresztül megy az F_2 -nek e -re vonatkozó szimmetrikus pontján, F'_2 is. Így olyan k kört kell szerkesztenünk, mely két adott ponton megy keresztül, (F_2 és F'_2) és a K kört érinti.



A K és a keresett k kör hatványvonala a két kör közös t érintője. A t az $F_2F'_2$ egyenest oly E pontban metszi, melynek hatványa az F_2, F'_2 pontokon átmenő bármely körre ugyanakkora, t.i. $\overline{EF_2} \cdot \overline{EF'_2}$. Szerkesszünk tehát egy tetszőleges γ kört az $F_1F'_1$ pontokon keresztül, mely a K kört metszi: γ és K hatványvonala közös húrjukat tartó

egyenes lesz és ez is az E ponton megy keresztül. Ilyen módon megkaptuk az $F_2F'_2$ egyenes E pontját: innen a K körhöz érintőket húzunk (t_1 és t_2).

Az érintési pontokat összekötjük F_1 ponttal: az összekötő egyenesek az e -t a keresett k_1 és k_2 körök középpontjaiban metszik. Ezek, t.i. M_1 és M_2 lesznek az ellipszis és az e egyenes metszéspontjai.

Bizám György (Bolyai g. VIII. o. Bp. V.).

Hoffmann Tibor (Szent-István g. VII. o. Bp. XIV.).

Jegyzet. A szerkesztés végezhető, ha F'_2 nem esik a K körön kívül. Ha F'_2 a K körre esik, akkor az F_2 -ből e -re állított merőleges talppontja az ellipszis O középpontjától a -távolságban lesz, azaz ezen talppont a főkörön fekszik: ekkor e az ellipszis érintője. Ezen esetben E és F'_2 összeesik; $F_1F'_2$ az e -t azon pontban metszi, amelyben e az ellipszist érinti.