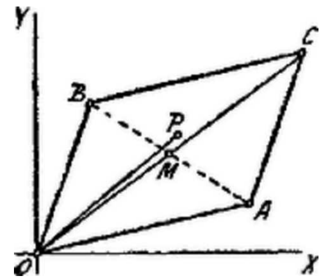
I. Megoldás. Keressük meg az A és B számoknak megfelelő pontokat a számsíkon és szerkesszük meg az $OABC$ parallelogrammát. Ekkor a C pontnak megtelelő komplex szám $C = A + B$. Az OC távolság M felezőpontjának pedig $\frac{1}{2}\ C = \frac{1}{2}(A+B)$ felel meg, azaz az A és B számok számtani középarányosa.



Legyen A és B mértani középarányosa P, tehát, ha

$$A = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad B = r_2(\cos\beta + i\sin\beta),$$

akkor

$$P = (AB)^{\frac{1}{2}} = (r_1 r_2)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

azaz P argumentuma $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ és így OP felezi az $\widehat{AOB}$-et. (Az AOB szögről van szó – A szerk.)

Az $\dfrac{M}{P}$ hányados akkor és csak akkor valós, ha az O, M, P pontok egy egyenesen vannak. A szóban forgó esetben ez kétféleképpen állhat elő:

1) Az O, A, B pontok egy egyenesben vannak, *azonban O nem fekszik A és B között*[1]; ebbe az egyenesbe esnek a C, M, P pontok is. Ekkor tehát $\dfrac{A}{B}$ valós.

2) Az $OABC$ parallelogramma OMC átlója és OP szögfelezője összeesik; tehát, ha $A \ddagger B$, kell, hogy $OABC$ rombus legyen,
azaz

$$OA = OB, \quad \text{ill.} \quad |A| = |B|.$$

II. Megoldás. Ha $A = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $B = r_2(\cos\beta + i\sin\beta)$, akkor

$$\frac{A+B}{2(AB)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha) + r_2(\cos\beta + i\sin\beta)}{2(r_1r_2)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right]} =$$

$$= \frac{1}{2(r_1r_2)^{\frac{1}{2}}}\left[r_1\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + r_2\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + i\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2(r_1r_2)^{\frac{1}{2}}}\left[r_1\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + r_2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\left(r_1\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + r_2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right].$$

Ezen szám valós, ha i szorzója eltűnik, azaz ha:

$$r_1\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + r_2\sin\frac{\beta-\alpha}{2} = (r_1 - r_2)\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Ez két esetben következik be:

1) Ha $r_1 - r_2 = 0$, vagyis $r_1 = r_2$, $|A| = |B|$.

2) Ha $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 0$, ill. $\dfrac{\alpha-\beta}{2} = k\pi$, $\alpha - \beta = 2k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$[2].

Ekkor

$$\frac{A}{B} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\right] =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[1 + i\cdot 0\right] = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{azaz} \quad \frac{A}{B} \quad \text{valós.}$$

Sellmann Tibor (Somssich Pál rg. VIII. o. Kaposvár).

---

[1] Ha O az A és B között fekszik, azaz $\beta = \alpha + \pi$, akkor $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$. Ekkor $OP \perp AOB$! $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ nem lehetnek ellentétes irányúak.

[2] $\alpha - \beta = 2k\pi$ azt jelenti, hogy $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ ugyanazon irányúak!

Jegyzet. 1^0. A megoldások egy része a komplex számok $a+bi$ alakjából indul ki.

2^0. Ha $r_1=r_2=r$, akkor

$$\frac{A+B}{2}=\frac{1}{2}r\left[\cos\alpha+\cos\beta+i(\sin\alpha+\sin\beta)\right]=r\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\right.$$
$$\left.+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Az I. megoldás szerint $\left|\frac{A+B}{2}\right|=OM$. Rombus esetén $OM=r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ és argumentuma $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

$$\left|\sqrt{AB}\right|=OP=r\quad\text{és argumentuma}\quad\frac{\alpha+\beta}{2}.$$
$$\sqrt{AB}=r\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$
$$\frac{A+B}{2\sqrt{AB}}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad\text{valós.}$$

3^0 Egyes megoldásokban látható a következő gondolatmenet: $\frac{A+B}{2\sqrt{AB}}$ valós, ha négyzete: $\frac{1}{4}\left(\frac{A^2+2AB+B^2}{AB}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}+2\right)$ szintén valós. Ez szükséges, de nem elegendő; ugyanis, valós szám négyzete pozitív is tartozik lenni.

Kérdés tehát, hogyan lehet $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}+2$ valós és pozitív? Mindenesetre kell, hogy $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}$ is valós legyen. Ez kétféleképpen lehetséges:

1) $\frac{A}{B}$ valós; ekkor $\frac{B}{A}$ is valós. Azonban $\frac{A}{B}$ nem lehet negatív; ugyanis, ha $\frac{A}{B}$ negatív, $\frac{B}{A}$ is az és

$$\left|\frac{A}{B}\right|+\left|\frac{B}{A}\right|>2,\quad\frac{A}{B}+\frac{B}{A}<-2,$$

tehát

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}+2<0\quad\text{lenne.}$$

Kell eszerint, hogy $\frac{A}{B}$ pozitív legyen, azaz $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ egyirányúak legyenek.

2) $\frac{A}{B}+\frac{B}{A}$ valós, ha $\frac{A}{B}$ és $\frac{B}{A}$ konjugált komplex számok. Legyen tehát

$$\frac{A}{B}=p+qi\quad\text{és így}\quad\frac{B}{A}=\frac{p-qi}{p^2+q^2}.$$

Ekkor

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}=p+\frac{p}{p^2+q^2}+\left(q-\frac{q}{p^2+q^2}\right)i$$

Ezen összeg valós, ha

$$q-\frac{q}{p^2+q^2}=q\left(\frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2}\right)=0,$$

azaz: vagy $q=0$ vagy $p^2+q^2=1$.

$q=0$ esetben $\frac{A}{B}$ ill. $\frac{B}{A}$ valós. Ezt láttuk előbb.

$$p^2+q^2=1\quad\text{esetben}\quad\left|\frac{A}{B}\right|^2=p^2+q^2=1,\quad\text{azaz}\quad|A|=|B|.$$

Mivel pedig $p^2+q^2=1$ miatt $|p|<1$, azaz $-1<p<1$
továbbá

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}=p+p=2p,$$

tehát

$$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}+2=2p+2>0.$$