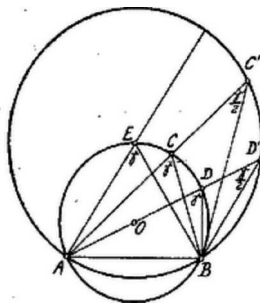


I. Megoldás. 1°. A háromszög vagy hegyesszögű vagy derékszögű; első esetben a körülírt kör középpontja a háromszögön belül, második esetben a háromszög kerületén (az átfogón) fekszik.

Legyen $ABC\triangle$ az R sugarú körbe írt hegyes szögű háromszög. Hosszabbítsuk meg pl. az AC oldalt és mérjük fel a meghosszabbításra a $CC' = BC$ távolságot. Ha $ACB\angle = \gamma$, akkor nyilván $AC'B\angle = \frac{\gamma}{2}$.



Tegyük fel, hogy $\overline{AC} > \overline{BC}$. Ezen esetben húzzuk meg az A csúcsból kiinduló AD átmérőt és ennek meghosszabbítására mérjük fel a $DD' = DB$ távolságot. Minthogy $ADB\angle = \gamma$, azért $AD'B\angle = \frac{\gamma}{2}$.

Eszerint C' és D' oly kör kerületén fekszenek, melyben az AB húrhoz $\frac{\gamma}{2}$ kerületi szög tartozik. Ezen kör középpontja az $\widehat{AB}$ ív E felezőpontja (amelyre $AEB\angle = \gamma$). Minthogy $ABC\triangle$ hegyesszögű, AC az AE és AD között fekszik, azaz AC' az E középpontú (és EA sugarú) körben oly húr, mely közelebb van az E középponthoz, mint a kör AD' húrja, tehát

$$\begin{aligned} AC + CC' &> AD + DD', \\ AC' + BC &> AD + BD, \\ AB + AC + BC &> AB + AD + BD. \end{aligned}$$

Azonban az ABD derékszögű háromszögben

$$AB + BD > AD = 2R$$

és így $AB + AC + BC > 2AD = 4R$.

A háromszög kerülete akkor lesz $4R$, ha két oldala egy átmérőben esik össze.

2°. Ha a körbe írt konvex sokszög tartalmazza a kör középpontját (vagy a belsejében vagy a kerületén), akkor a sokszöget egy csúcsból kiinduló átlókkal háromszögekre bontjuk. Ezek egyikének tartalmaznia kell a kör középpontját. Erre a háromszögre pedig érvényes e tétel, tehát érvényes a sokszögre is, mert ennek kerülete nagyobb az előbb kiemelt háromszögénél.

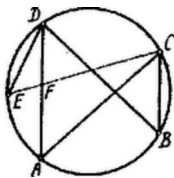
Jegyzet. Ha az R sugarú körben mindazon hegyesszögű háromszögeket vizsgáljuk, melyeknek AB oldala szilárd húr, ezeknek kerületét az ADB derékszögű háromszög kerületével hasonlítjuk össze. Azon háromszögek harmadik csúcsa, melyeknek AB alapjuk szilárd és kerületük: $AB + AD + BD$, oly ellipszisen mozog, melynek gyújtópontjai A és B , nagy tengelye $AD + BD$. Ezen ellipszisnek a körhöz való helyzetéből következik, hogy ha C a körön fekszik úgy, hogy $ACB\angle$ hegyesszögű, akkor C az ellipszisen kívül fekszik, tehát

$$AC + BC > AD + BD.$$

II. Megoldás. Felhasználjuk a következő segédtelet:

Ha a kört az A, B, C, D pontokkal négy részre osztjuk úgy, hogy $\widehat{AD} > \widehat{BC}$ legyen, akkor

$$\overline{AD} + \overline{BD} > \overline{AC} + \overline{BC}.$$



Ugyanis feltevésünk szerint az $\widehat{AD}$ íven van olyan E pont, amelyre $\widehat{DE} = \widehat{BC}$, tehát $\widehat{DE} = \widehat{BC}$ és így $\overline{BD} = \overline{CE}$. Ha már most az $\widehat{AD}$ és $\widehat{CE}$ húrok metszéspontja F , akkor

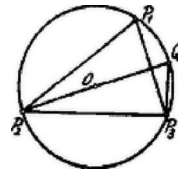
$$\overline{AF} + \overline{CF} > \overline{AC} \quad \text{és} \quad \overline{DF} + \overline{EF} > \overline{DE}.$$

E két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összegezve

$$\overline{AD} + \overline{CE} > \overline{AC} + \overline{DE}$$

vagy

$$\overline{AD} + \overline{BD} > \overline{AC} + \overline{BC} \dots \quad Q.e.d.$$



Legyen már most $P_1P_2P_3$ olyan beírt háromszög, amelynek belsejében van a kör O középpontja és pl. $\overline{P_1P_2} \geq P_1P_3$. Ekkor $\widehat{P_1P_2} \geq \widehat{P_1P_3}$. Ha P_2O a kört másodszor Q -ban metszi, még inkább áll: $\widehat{P_1P_2} > \widehat{QP_3}$. Segéd-tételünk szerint:

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_1P_3} > \overline{QP_2} + \overline{QP_3}$$

tehát

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_1P_3} > \overline{QP_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{QP_3} > 2\overline{QP_2} = 4R.$$

Ha O a háromszög kerületére esik, vagyis az egyik oldal átmérő (mint a $QP_2P_3\triangle$ -ben), akkor közvetlenül látható, hogy a háromszög kerülete nagyobb az átmérő kétszeresénél.

Jegyzet. Ezen bizonyítás független a háromszög szögeinek összegére vonatkozó (euklidesi) tételtől.

III. Megoldás. Jelöljük az R sugara körbe írt háromszög oldalait a, b, c , megfelelő szögeit α, β, γ . Ismeretes, hogy

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma.$$

Így tehát $a + b + c = 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$.

A háromszög szögeinek sinusai pozitív, egységnél nem nagyobb számok, úgy, hogy $\sin \alpha \geq \sin^2 \alpha$ s í. t., de

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma.$$

Azonban $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Ha a háromszög hegyesszögű vagy derékszögű, a cosinusok egyike sem negatív, tehát

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \geq 2.$$

(Az egyenlőség jele akkor áll elő, ha az egyik szög derékszög!)

Eszerint

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma > 2$$

és

$$a + b + c > 4R.$$

Bizám György (Bolyai g. VII. o. Bp. V.)