

I. Megoldás. Feltételünk szerint

$$(1) \quad \sin \gamma = \cos \alpha + \cos \beta \quad \text{vagyis} \quad 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \dots$$

Azonban $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$, tehát $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2}$.

Erre való tekintettel (1)-ből: $\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,
és így $\gamma = \pm(\alpha - \beta)$,

tehát vagy $\alpha = \beta + \gamma = 90^\circ$,

vagy $\beta = \alpha + \gamma = 90^\circ$.

Szabó Béla (Hunyadi Mátyás honvéd reálisk. VIII. o. Kőszeg).

II. Megoldás. Feltételi egyenletünkéből

$$(1) \quad \sin^2 \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \dots$$
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) + 2 \cos \alpha \cos \beta =$$
$$(2) \quad = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \dots$$

Bármely háromszög szögeire nézve érvényes¹

$$(3) \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \dots$$

2) és 3) egybevetéséből

$$(4) \quad \cos \alpha \cos \beta (1 - \cos \gamma) = 0 \dots$$

Ezen egyenlet csak úgy állhat meg, ha

vagy $\cos \alpha = 0$, vagy $\cos \beta = 0$, vagy $1 - \cos \gamma = 0$

azaz vagy $\alpha = 90^\circ$ vagy $\beta = 90^\circ$, vagy $\gamma = 0$.

A harmadik esetben nincs háromszög. (Ekkor $\cos \alpha = -\cos \beta$ azt jelenti, hogy β és γ kiegészítő szögek, azaz a háromszöget alkotó három egyenes közül kettő párhuzamos.)

Hajnal Miklós (Izr. g. VIII. o. Bp.)

Jegyzet. Néhány itt fel nem sorolt megoldás azt bizonyítja, hogy $\sin \gamma - \cos \alpha = \cos \beta$, ha a háromszög derékszögű.

¹L. XI. évf. 197. o. 1084. feladatot.