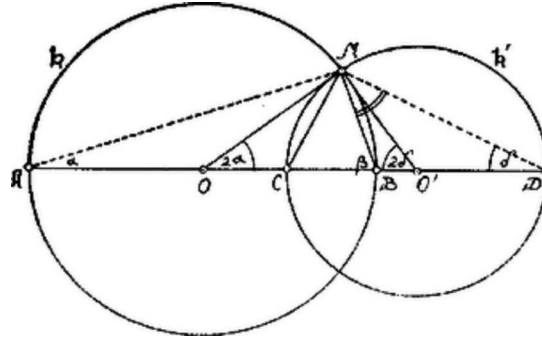


I. Megoldás. Szerkesszük meg azon P pontok mértani helyét, amelyekre nézve $\frac{AP}{BP} = m$, állandó. Ezen mértani hely kör, mely az AB egyenest két pontban metszi: C és D -ben. Ha C A és B között van, akkor D az AB szeleten kívül és B -hez közelebb van, ha $m > 1$.

Az AB átmérő fölött szerkesztett kört jelölje k , a CD átmérőhöz tartozó kör k' . (Ezen k' a szóbanforgó mértani hely.) k középpontja legyen O , k' -é O' . A két kör egyik metszéspontja legyen M . Be kell bizonyítanunk, hogy $OM \perp O'M$. Az $MAB \sphericalangle = \alpha$, $MBA \sphericalangle = \beta$ és (Thales tételével) $AMB \sphericalangle = 90^\circ$; így $\alpha + \beta = 90^\circ$.



A k körben $MOB \sphericalangle$ középponti szög az α kerületi szög kétszerese: $MOB \sphericalangle = 2\alpha$.

A k' körben $MO'B \sphericalangle = 2\delta$.

Minthogy β az $MDB \Delta$ külső szöge, MD pedig az $AMB \Delta$ M csúcsánál fekvő külső szöget felezi ¹ és ezen külső szög 90° -ú, $\delta = \beta - 45^\circ$

Eszerint

$$\begin{aligned} MOO' \sphericalangle + MO'O \sphericalangle &= MOB \sphericalangle + MO'B \sphericalangle = 2\alpha + 2\delta = \\ &= 2\alpha + 2\beta - 90^\circ = 2(\alpha + \beta) - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $OMO' \sphericalangle = 90^\circ$, azaz $OM \perp O'M$.

Jegyzet: E megoldások túlnyomó részben azt mutatták ki, hogy $\overline{OO'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2$.

II. Megoldás. Az $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ egyenlőség írható így is:

$$\frac{AO + OC}{AO - OC} = \frac{AO + OD}{OD - AO}.$$

Ebből keletkezik:

$$\overline{AO}^2 = AC \cdot AD.$$

Minthogy

$$AO = OM, \quad \overline{OM}^2 = \overline{AC} \cdot AD.$$

Ez azt jelenti, hogy OM a CD átmérőjű k' kört érinti az M pontban. Hasonlóan mutatható ki, hogy $O'M$ a k kört érinti az M pontban. Tehát $OM \perp O'M$.

Taksony György (Ág. ev. g. VIII. o. Bp.)

¹ MC belső szögfelező, mert $AC : BC = AM : BM$; felezi az $AMB \sphericalangle = 90^\circ$ -ot és $MD \perp MC$.