Állapítsuk meg első sorban a másodfokú görbe nemét. Erre nézve a quadratikus tagok nyújtanak felvilágosítást. Ugyanis ezek

$$4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x - y)^2 \tag{I.}$$

szerint teljes négyzetet alkotnak, tehát parabolával – esetleg elfajuló parabolával [1] – van dolgunk, melynek a végtelenben két összeeső pontja van az $x - y = 0$ egyenes által meghatározott irányban. Ezen irány azonban a parabola tengelyének iránya. Az $x - y = 0$ egyenes irányhatározója $\operatorname{tg}\alpha = 1$.

Ha meghatározzuk a parabolának az X-, ill. Y-tengellyel való metszéspontjait, nyilvánvalóvá válik, hogy a parabola tengelye $\alpha = 45°$-ú szöget zár be az X tengellyel. [2]

Állapítsuk meg most a görbe egyenletét oly derékszögű $(x',\, y')$ koordinátarendszerben, mely az eredetiből, a kezdőpont körüli elforgatásból származik. Az elforgatás szöge pedig legyen $\alpha = +45°$. Ha valamely pont koordinátái az eredeti rendszerben $(x,\, y)$, az új rendszerben $(x',\, y')$, akkor az ú. n. transzformációs összefüggések:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = x'\cos 45° - y'\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = x'\cos 45° + y'\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Helyettesítsünk ezek szerint a görbe egyenletébe; keletkezik:

$$2(x' - y')^2 - 4(x'^2 - y'^2) + 2(x' + y')^2 + 4\sqrt{2}(x' - y') - 8\sqrt{2}(x' + y') + 3 = 0.$$

Összevonás után:

$$8y'^2 - 4\sqrt{2}x' - 12\sqrt{2}y' + 3 = 0$$

vagy

$$x' = \sqrt{2}y'^2 - 3y' + \frac{3}{4\sqrt{2}}$$
$$\frac{x'}{\sqrt{2}} = y'^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}y' + \frac{3}{8} = \left(y' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{3}{4}\dots \tag{II.}$$

Ebből az egyenletből már világosan látjuk, hogy oly parabolával van dolgunk, melynek tengelye párhuzamos az új koordinátarendszer X'-tengelyével; csúcspontjának koordinátái

$$y'_0 = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \qquad x'_0 = -\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

A csúcspont koordinátái az eredeti rendszerben

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'_0 - y'_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2},$$
$$y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'_0 + y'_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \quad 0,$$

azaz a parabola csúcspontja az X-tengelyen fekszik.

A parabola tengelyének egyenlete – az $(x,\, y)$ rendszerben:

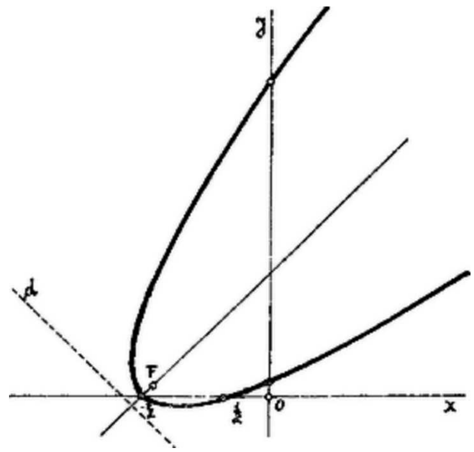
$$y = x + \frac{3}{2}.$$

A parabola megszerkesztéséhez ismernünk kell még a gyújtópont helyzetét. A II. egyenletből kiolvashatjuk, hogyha a parabola paramétere p, akkor

$$2p = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{p}{2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

[1] Két párhuzamos egyenesből álló egyenespár.

[2] Az X-tengellyel való metszéspontokra nézve $y = 0$, tehát ezek abscissái I. szerint a $4x^2 + 8x + 3 = 0$ egyenlet gyökei: $-\frac{3}{2}$ és $-\frac{1}{2}$. Az Y-tengellyel való metszéspontokra $x = 0$; ezek ordinátái I. szerint a $4y^2 - 16y + 3 = 0$ egyenlet gyökei: $2 - \frac{\sqrt{13}}{2}$ és $2 + \frac{\sqrt{13}}{2}$.



A gyújtópont az X' tengellyel párhuzamos egyenesen fekszik, a csúcstól $\frac{p}{2}$ távolságban; ezért a gyújtópont koordinátái az (x', y') rendszerben:

$$x_1' = -\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} = -\frac{5}{4\sqrt{2}}, \quad y_1' = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Az eredeti (x, y) rendszerben

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{5}{4\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{11}{8}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{5}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{8}.$$

A csúcspont és a gyújtópont meghatározzák a parabola vezérvonalának helyzetét is. $\left(x + y = -\frac{7}{4}\right)$

Csáki Frigyes (Bolyai g. VIII. o. Bp. V.)