

1⁰. Legyen

$$|a - x| = m^2, \quad |b - x| = p^2, \quad |c - x| = r^2,$$

ahol m, p, r pozitív számok.

$\alpha)$ Ha $x < a < b < c$, akkora $a - x, b - x, c - x$ egyidejűleg pozitív számok, tehát

$$a - x = m^2, \quad b - x = p^2, \quad c - x = r^2 \quad \text{és} \quad m < p < r.$$

Továbbá $a - b = m^2 - p^2, \quad b - c = p^2 - r^2, \quad c - a = r^2 - m^2$.

A megadott kifejezést jelölje y .

$$\begin{aligned} y &= \frac{m^2 - p^2}{r} + \frac{p^2 - r^2}{m} + \frac{r^2 - m^2}{p} = \\ &= \frac{1}{mpr} [mp(m^2 - p^2) + pr(p^2 - r^2) + rm(r^2 - m^2)]. \end{aligned}$$

y előjele megegyezik a szögletes zárjelbe foglalt számláló előjével. Ez eltűnik, ha $m = p$, ha $p = r$, ha $m = r$; ezért osztható az $(m - p), (p - r), (m - r)$ tényezőkkel, úgy, hogy

$$y = \frac{1}{mpr} (m - p)(p - r)(m - r)(m + p + r).$$

Minthogy a jobboldalon álló három első tényező negatív, y is az.

$\beta)$ Ha $a < b < c < x$, akkor

$$a - x = -m^2, \quad b - x = -p^2, \quad c - x = -r^2 \quad \text{és} \quad r < p < m.$$

Most

$$y = -\frac{m^2 - p^2}{r} - \frac{p^2 - r^2}{m} - \frac{r^2 - m^2}{p}.$$

Az előbbihez hasonló tényezőkre bontással

$$y = -\frac{1}{mpr} (m - p)(p - r)(m - r)(m + p + r)$$

Minthogy a jobboldal minden tényezője pozitív, y most is negatív.

2⁰. $\alpha)$ Ha $x > a > b > c$, akkor

$$a - x = -m^2, \quad b - x = -p^2, \quad c - x = -r^2, \quad \text{ahol} \quad m < p < r.$$

Keletkezik:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{m^2 - p^2}{r} - \frac{p^2 - r^2}{m} - \frac{r^2 - m^2}{p} = \\ &= -\frac{1}{mpr} (m - p)(p - r)(m - r)(m + p + r). \end{aligned}$$

A jobboldali első három tényező mindegyike negatív, tehát $y > 0$.

$\beta)$ $a > b > c > x$ mellett

$$a - x = m^2, \quad b - x = p^2, \quad c - x = r^2, \quad \text{ahol} \quad r < p < m.$$

Most

$$y = \frac{1}{mpr} (m - p)(p - r)(m - r)(m + p + r).$$

A jobboldal minden tényezője pozitív, tehát $y > 0$.

$\beta)$ Ezen feladatra nem érkezett elfogadható megoldás.