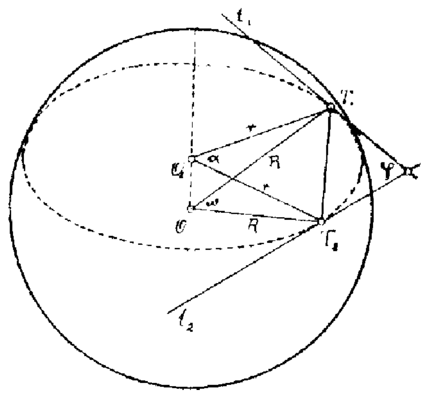
I. Megoldás. A gömb sugara legyen R, valamely gömbi körének sugara r. Az r sugarú körbe n oldalú szabályos sokszöget írunk, a sokszög csúcsaiban a gömbhöz érintősíkokat fektetünk. A gömb középpontját az érintési pontokkal (a sokszög csúcsaival) összekötő sugarak merőlegesek az érintő síkokra; két szomszédos sík érintési pontjaihoz húzott gömbi sugarak szöge, ω a két sík φ hajlásszögének kiegészítő szöge, azaz

$$\varphi = \pi - \omega.$$

Az r sugarú gömbi körben két szomszédos sík érintési pontjait összekötő húrhoz, az n oldalú szabályos sokszög oldalához tartozó középponti szög: $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$.



Nagyobb sugarú körben ugyanakkora húrhoz kisebb középponti szög tartozik, mint a kisebb sugarú körben, tehát

$$\omega < \frac{2\pi}{n} \quad \text{és így} \quad \varphi > \pi - \frac{2\pi}{n}.$$

Ha $r = R$, akkor $\omega = \dfrac{2\pi}{n}$ és $\varphi = \pi - \dfrac{2\pi}{n}$. [1]

Eszerint valóban

$$\varphi \geq \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

Taksony György (Ág. ev. g. VIII. o. Bp.)

II. Megoldás. Azon gömbi sugarak, amelyek a gömb középpontját az érintősíkok érintési pontjaival kötik össze, egy n-oldalú testszöglet élei; ezen testszöglet élszögei egyenlők. Jelölje ω a testszöglet élszögét és φ két szomszédos érintősík hajlásszögét. Az előbbi megoldásban láttuk, hogy

$$\omega = \pi - \varphi.$$

Ismeretes, hogy konvex testszögletben az élszögek összege nem lehet nagyobb 2π-nél. Tehát

$$n\omega = n(\pi - \varphi) < 2\pi \quad \text{és innen} \quad \varphi \geq \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right).$$

Az egyenlőség akkor áll elő, ha a testszöglet élszögei egy síkba esnek, tehát egy legnagyobb kör síkjába. Ezen esetben az érintősíkok a legnagyobb kör síkjára merőlegesek.

Volena-Koczor Imre (Révay g. VIII. o. Győr).

[1] Ezen estben az érintő síkok egy legnagyobb kör síkjára merőlegesek, hasábos teret alkotnak! A testszöglet csúcsa a végtelenbe kerül.