

I. Megoldás A triéder csúcsa legyen egy gömb középpontja. A triéder a gömbön oly gömbháromszöget határoz meg, melynek oldalai a triéder élszögeivel, szögei a triéder lapszögeivel egyenlők. Jelöljük α , β , γ a gömbháromszög oldalait és x az α -val szemben fekvő szögét; akkor

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos x.$$

Ha $\beta = \gamma = \alpha$, akkor $\cos \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos x$,
ill.

$$\cos \alpha = \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha) \cos x,$$

és innen

$$\cos x = \frac{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ esetet kizárjuk és így

$$\cos x = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Ha $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha > 0$, $\cos x < \cos \alpha$ és $x > \alpha$.

Ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = 0$ és $\cos x = 0$, tehát $x = \frac{\pi}{2}$: derékszögű triéderrel van dolgunk.

Ha $\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha < 0$, $0 < 1 + \cos \alpha < 1$, $\cos x < 0$, de $|\cos x| > |\cos \alpha|$ és így $x > \alpha$. (Úgy α , mint x tompaszögek!)

$\alpha + x = \frac{\pi}{2}$ esetben $\cos x = \sin \alpha$. Ekkor

$$\sin \alpha (1 + \cos \alpha) = \cos \alpha \quad \text{ill.} \quad \sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha - \sin \alpha.$$

Négyzetreemelve: $(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha$
azaz

$$\sin^2 2\alpha + 4 \sin 2\alpha - 4 = 0.$$

Innen

$$\sin 2\alpha = 2(-1 + \sqrt{2}).$$

Az egyenletnek negatív gyöke abszolút értékre > 1 , nem vehető figyelembe.

A táblából kikeresve: $2\alpha = 55^\circ 56' 15''$, $\alpha = 27^\circ 58' 7,5''$

és

$$x = 90^\circ - \alpha = 62^\circ 1' 52,5''.$$

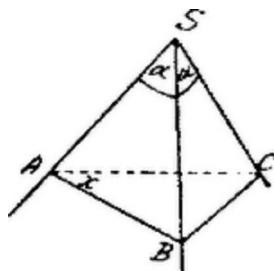
Ugyanazon sinusa van az $55^\circ 56' 15''$ kiegészítő szögének is; azonban ez t. i. $180^\circ - 55^\circ 56' 15''$ nem felelhet meg, mert ekkor $2\alpha > \frac{\pi}{2}$, $\alpha > \frac{\pi}{4}$ és $x = \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{4} < \alpha$ lenne, holott kell, hogy $x > \alpha$ legyen!

Bizám György (Bólyai g. VI. o. Bp. V.)

II. Megoldás. A triéder egyik élén felvett A pontban állítsunk az SA élre merőleges síkot; ez a másik két élt a B és C pontokban metszi. Minthogy SAB és SAC az A -nál derékszögű, egybevágó háromszögek,¹ $SB = SC$ és $AB = AC$. Az $SAB\triangle$ -ből: $AB = SB \sin \alpha$.

A BSC egyenlőszárú háromszögből:

$$BC = 2SB \sin \frac{\alpha}{2}.$$



A BAC egyenlőszárú háromszögben $BAC \sphericalangle = x$, tehát

$$BC = 2AB \sin \frac{x}{2} = 2SB \sin \alpha \sin \frac{x}{2}.$$

Ezek szerint $2SB \sin \frac{\alpha}{2} = 2SB \sin \alpha \sin \frac{x}{2}$,

azaz

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha \sin \frac{x}{2}.$$

¹Egy oldal és a rajtafekvő két szög egyenlő!

²Ebből kiolvasható, hogy $\sin \frac{\alpha}{2} \leq \sin \frac{x}{2}$, tehát $\alpha \leq x$. ($\sin \alpha > 0$, $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$, $\sin \frac{x}{2} > 0$.)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{x}{2} \quad \text{ill.} \quad 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{x}{2} = 1.$$

Négyzetreemelve:

$$4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{x}{2} = 1.$$

Azonban $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$, $2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$,

és így $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos x) = 1$, ill. $\cos x = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$.