

1⁰. Valamely függvény állandóan növekedő, ha differenciálhányadosa az x minden értékénél pozitív.

$$y' = \frac{(4x - 5a)(x - 2a) - (2x^2 - 5ax + 8)}{(x - 2a)^2} = \frac{2}{(x - 2a)^2}[(x - 2a)^2 + a^2 - 4]$$

A y' nevezője pozitív; ezért előjele csak a számláló, vagyis az

$$f(x) \equiv (x - 2a)^2 + a^2 - 4$$

másodfokú függvény előjelétől függ. Amint látjuk $f(x)$ az x minden értékénél pozitív, ha $a^2 - 4 > 0$, azaz

$$\text{ha } a < -2 \quad \text{vagy} \quad \text{ha } a > +2.$$

Ezen esetekben az $f(x) = 0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei. Az y függvény állandóan növekedik. Az $x = 2a$ helyen szakadása van oly módon, hogy itt $y = \pm\infty$.

2⁰. Ha $-2 < a < +2$, akkor az $f(x)$ másodfokú függvény előjelet változtat azon x helyeken, ahol $f(x) = 0$. Ha ezen helyek x' és x'' , úgy hogy $x' < x''$, akkor $f(x)$ az x' helyen pozitív értékekből megy át negatív értékekbe;¹ ezért itt y -nak maximuma van.

Az x'' helyen $f(x)$ negatív értékekből megy át pozitív értékekbe, tehát itt y -nak minimuma van.

3⁰. Az előzőkből látjuk, hogy $a_1 = -2$ és $a_2 = +2$ azon értékek, amelyek elválasztják egymástól az 1^o. alatti a értékeket a 2^o. alattiaktól. Ha $a_1 = -2$ és $x + 4 \neq 0$, akkor

$$y = \frac{2x^2 + 10x + 8}{x + 4} = \frac{2(x + 4)(x + 1)}{x + 4} = 2(x + 1).$$

$$a = +2 \text{ mellett, ha } x - 4 \neq 0, y = \frac{2x^2 - 10x + 8}{x - 4} = \frac{2(x - 4)(x - 1)}{x - 4} = 2(x - 1).^2$$

4⁰. Nyilvánvaló, hogy az y függvénynek hiperbola felel meg. Ha az osztást elvégezzük,

$$y = 2x - a + \frac{8 - 2a^2}{x - 2a}.$$

Innen kiolvashatjuk, hogy az

$$x = 2a \quad \text{és} \quad y = 2x - a$$

egyenesek a C görbe aszimptotái. E két egyenes metszéspontjának – a görbe középpontjának – koordinátái:

$$x = 2a, \quad y = 3a$$

Az a kiküszöbölésével a középpont koordinátái között

$$y = \frac{3x}{2}$$

összefüggés áll elő; ez oly egyenes egyenlete, mely az origon megy keresztül. Ezen egyenest írja le a C hiperbola középpontja, ha a felveszi az összes lehetséges értékeket.

5⁰. A C görbe egyenletét, a nevező eltávolítása után

$$2x^2 - xy + 8 = a(5x - 2y)$$

alakra hozhatjuk. Ha $5x - 2y = 0$, akkor a minden értéke mellett

$$2x^2 - \frac{5}{2}x \cdot x + 8 \equiv 8 - \frac{x^2}{2} = 0, \quad \text{vagyis} \quad x = \pm 4 \quad \text{és így} \quad y = \pm \frac{5}{2} \cdot 4 = \pm 10.$$

Tehát az összes görbék keresztülmennek a

$$P_1(4, 10), \quad P_2(-4, -10)$$

szilárd pontokon.

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VI. o. Bp. V.)

Jegyzet. Ha pl. $a = -2$, akkor az $x = -4$, $y = 2x + 2$ egyenesek párjával van dolgunk. Az $(x = -4, y = -10)$ ponton az $x = -4$ egyenes, az $(x = 4, y = 10)$ ponton az $y = 2x + 2$ megy keresztül.

¹ Ugyanis $f(x)$ az x -nek oly másodfokú függvénye, amelyben x^2 együtthatója pozitív.

² $y = \frac{2x^2 - 5ax + 8}{x - 2a}$ írható $2x^2 - xy - 5ax + 2ay + 8 = 0$ alakban. Ha pl. $a = -2$, akkor $2x^2 + (10 - y)x + 8 - 4y \equiv (x + 4)(2x + 2 - y) = 0$. Az egyenespár két egyenese: $x + 4 = 0$ és $y = 2x + 2$.