

A gyökmennyiségeket mint 3 hatványait írjuk fel; az egyenlő alapú hatványok szorzatában a közös alapot (3) a kitevők összegére emeljük. Így keletkezik az

$$S_{n-1} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \dots + \frac{n-1}{3^n}$$

összeg. Már most

$$\frac{1}{3}S_{n-1} = \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{4}{3^6} + \dots + \frac{n-2}{3^n} + \frac{n-1}{3^{n+1}}.$$

A két egyenlet megfelelő tagjait kivonva:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}S_{n-1} &= \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{n}{3^{n+1}} \\ 2S_{n-1} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^n}. \end{aligned}$$

A jobboldalon álló első n tag mértani sort alkot, amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$. Ha már most $n \rightarrow \infty$, akkor

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{2},$$

mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

Ugyanis az

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{3^3}, \dots, \frac{10}{3^{10}}, \dots, \frac{n}{3^n}$$

sorozat tagjai folyton kisebbednek, úgy, hogy ha n elég nagy, akkor $\frac{n}{3^n}$ értéke bármely kis számnál kisebb.

Eszerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \frac{1}{4}.$$

A gyökmennyiségek szorzatának határértéke: $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$.

Szlovák István (Vörösmarthy g. V. o. Bp. VIII.)