

Kiindulunk a kúpszeletek azon meghatározásából, amely szerint a kúpszelet mértani helye azon pontoknak, amelyekre nézve egy szilárd ponttól és egy szilárd egyenestől való távolságuk viszonya állandó. Az adott esetben a szilárd pont az origó, a kúpszelet egyik gyújtópontja és a szilárd egyenes a hozzá tartozó vezérvonal; ennek egyenlete $x-d=0$.

Valamely $P(x, y)$ pontra nézve az origótól való távolság: $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$.

A P pont távolsága az adott egyenestől $|x-d|$.

P pontnak ki kell elégítenie a következő egyenletet:

$$(1) \quad \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{|x-d|} = k \quad \text{ill.} \quad x^2 + y^2 - \lambda(x-d)^2 = 0 \dots$$

ahol $\lambda = k^2$ tetszőleges pozitív szám (ill. zérus), paraméter.¹ Az 1) kúpszelet sereg egyenlete: a seregben vannak ellipszisek, egy parabola és hiperbolák.

Vizsgáljuk már most ezen kúpszeletek azon pontjait, amelyekhez tartozó érintők párhuzamosak az $y = x$ egyenessel, azaz ezen érintők irányhatározója: 1.

Az 1) egyenletet x szerint differenciálva

$$(2) \quad 2x + 2yy' - 2\lambda(x-d) = 0, \quad \text{ill.} \quad x + yy' - \lambda(x-d) = 0 \dots$$

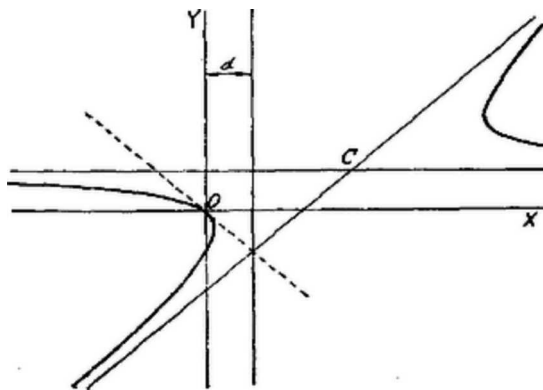
Ha y' , az érintő irányhatározója = 1, akkor az érintési pontok koordinátái között az

$$(3) \quad x + y - \lambda(x-d) = 0 \dots$$

összefüggés áll fenn. Az (1) és (3) egyenletekből álló rendszert x és y szerint megoldva x és y , mint λ paraméter függvényei állíthatók elő: így az érintési pontok mértani helyének paraméteres egyenleteit kapjuk. Ha pedig az (1)-ből, (3)-ból λ -t kiküszöböljük, az érintési pontok x, y koordinátái közötti összefüggéshez, a szóbanforgó mértani hely egyenletéhez jutunk.

(3)-ból $\lambda = \frac{x+y}{x-d}$. Ha ezt (1)-be behelyettesítjük, keletkezik:

$$(4) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 - (x+y)(x-d) &= 0 \\ \text{vagy} \quad y^2 - xy + d(x+y) &= 0 \dots \end{aligned}$$



A (4) nyilvánvalóan hiperbola egyenlete; a quadratikus tagok:

$y^2 - xy = y(y-x)$. Ebből azt olvashatjuk ki, hogy e hiperbola aszimptotái az $y = 0$ és $y - x = 0$ egyenesekkel párhuzamosak. A hiperbola középpontját a

$$(5) \quad -y + d = 0 \dots$$

$$(6) \quad 2y - x + d = 0 \dots$$

egyenletrendszer határozza meg; a középpont koordinátái: $3d, d$ Eszerint az aszimptoták egyenletei:

$$(7) \quad y = d \dots$$

$$(8) \quad y = x - 2d \dots$$

(4)-ből következik, hogy az $x+y=0$ egyenes a hiperbolát az origóban érinti. ($y = -x$ egyenesnek a 4) hiperbolával két összeeső közös pontja van az origóban!)