

Az egyenes egyenlete legyen $ax + by + c = 0$. Ezen egyenesnek és az $y = x^3$ görbének közös pontjaira nézve:

$$(1) \quad ax + bx^3 + c = 0 \dots$$

Ha ezen egyenlet gyökei x_1, x_2, x_3 (t. i. a közös pontok abszcisszái), akkor a szóban forgó pontok vetületei az $y = x^2$ parabolán ugyanezen x_i értékekhez tartoznak; ezek koordinátái tehát: (x_i, x_i^2) , $i = 1, 2, 3$. Mármint ki kell mutatnunk, hogy az (x_i, x_i^2) $i = 1, 2, 3$ pontok és az origó egy körön fekszenek.

Egy tetszőleges kör egyenlete:

$$(2) \quad x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \dots$$

Ezen kör keresztülmegy az (x_i, x_i^2) pontokon, ha

$$\left. \begin{aligned} Ax_1 + Bx_1^2 + C + x_1^2 + x_1^4 &= 0 \\ Ax_2 + Bx_2^2 + C + x_2^2 + x_2^4 &= 0 \\ Ax_3 + Bx_3^2 + C + x_3^2 + x_3^4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{I.}$$

Mint hogy az origó is pontja a körnek, $C = 0$. Így azonban az A és B kiszámítására három egyenletünk van. Ezen egyenletekből álló rendszernek akkor van egy és csakis egy megoldása, ha a determinánsa eltűnik, azaz, ha¹

$$(3) \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & x_1^2 + x_1^4 \\ x_2 & x_2^2 & x_2^2 + x_2^4 \\ x_3 & x_3^2 & x_3^2 + x_3^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & x_1^4 \\ x_2 & x_2^2 & x_2^4 \\ x_3 & x_3^2 & x_3^4 \end{vmatrix} = x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = 0 \dots$$

Azonban – az általában zérustól különböző – x_1, x_2, x_3 az 1) egyenlet gyökei, tehát

$$\left. \begin{aligned} c + ax_1 + bx_1^3 &= 0 \\ c + ax_2 + bx_2^3 &= 0 \\ c + ax_3 + bx_3^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II.}$$

A II. egyenletrendszer az a, b, c együtthatókra nézve homogén lineáris egyenletrendszer csak úgy állhat meg, ha determinánsa eltűnik, azaz, ha

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = 0 \dots$$

Mivel tehát ez, a 3) alatti feltétel is ki van elégítve: a szóbanforgó 4 pont valóban egy körön fekszik.

Jegyzet. Az 1) gyökeire nézve: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ennek tekintetbe vételével is kimutatható, hogy az 5) baloldalán álló determináns eltűnik. Fejtsük ki az első oszlop tagjai szerint. Keletkezik:

$$\begin{aligned} & (x_2 x_3^3 - x_2^3 x_3) - (x_1 x_3^3 - x_1^3 x_3) + (x_1 x_2^3 - x_2 x_1^3) = \\ & = x_2 x_3 (x_3 - x_2) (x_3 + x_2) - x_3 x_1 (x_3 - x_1) (x_3 + x_1) + x_1 x_2 (x_2 - x_1) (x_2 + x_1) = \\ & = -x_1 x_2 x_3 (x_3 - x_2) + x_1 x_2 x_3 (x_3 - x_1) - x_1 x_2 x_3 (x_2 - x_1) = \\ & = -x_1 x_2 x_3 (-x_3 + x_2 + x_3 - x_1 - x_2 + x_1) = 0. \end{aligned}$$

¹ Az determináns értéke nem változik, ha egy oszlop tagjait kivonjuk egy másik oszlop megfelelt tagjaiból; az egy-egy sor tagjainak közös tényezőjét pedig kiemelhetjük.