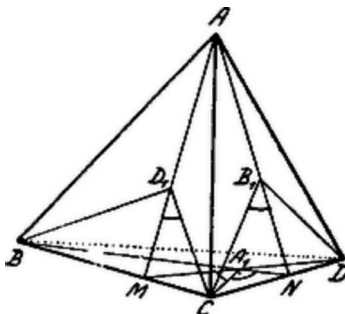


1.⁰ Ha az $ABC\triangle$ -n belül van olyan P pont, amelyből minden oldal 120° -ú szög alatt látható, azaz

$$(1) \quad APB\angle = BPC\angle = CPA\angle = 120^\circ \dots$$

akkor az AP egyenes felezi a $BPC\angle$ -et, BP a $CPA\angle$ -et, CP az $APB\angle$ -et.

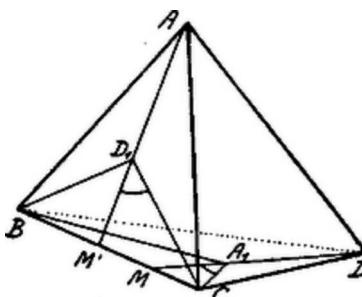
Ha viszont AP felezi a $BPC\angle$ -et, BP a $CPA\angle$ -et, CP az $APB\angle$ -et, akkor az (1) egyenlőség áll elő.



2.⁰ Legyen $ABCD$ izogónikus tetraéder. A beírt gömb érintési pontjai A_1, B_1, C_1, D_1 . Feltevésünk szerint a BCD határlapon az A_1 -et a csúcsokkal összekötő transzverzálisok szögei 120° -úak. 1.⁰ szerint DA_1 felezi a $BA_1C\angle$ -et és BC -t az M pontban metszi.

Az ABC lapon $BD_1C\angle = 120^\circ$ és AD_1 felezi ezt. Mivel pedig $BA_1 = BD_1, CA_1 = CD_1$,¹ azért $BA_1C \cong BD_1C\triangle$; a $BD_1C\angle$ -et felező egyenes ugyanazon M pontban metszi BC -t, mint a $BA_1C\angle$ -et felező egyenes. Ebből következik, hogy AA_1 és DD_1 – az ADM síkban fekvő egyenesek – metszik egymást.

Hasonlóan mutatható ki, hogy a BB_1 ill. CC_1 egyenes, mely nem fekszik az ADM síkban, metszi az AA_1 -t és DD_1 -t is: tehát kell, hogy úgy BB_1 mint CC_1 ezek metszőpontján menjen keresztül. Azaz: ha a tetraéder izogónikus, a tetraéderbe írt gömb érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő transzverzálisok egy ponton mennek keresztül.



3.⁰ Legyen $ABCD$ nem izogónikus tetraéder, amelynél pl. $AD_1C\angle \neq CA_1D\angle$. Ebben az esetben DA_1 és AD_1 nem metszik BC -t ugyanazon pontban. DA_1 és BC metszéspontja legyen M , az AD_1 és BC metszéspontja M' .

Bang-tétele értelmében $BA_1C\angle = BD_1C\angle$ és így $BD_1C\triangle \cong BA_1C\triangle$. Azonban

$$CA_1M\angle = 180^\circ - CA_1D\angle$$

és
$$CD_1M'\angle = 180^\circ - AD_1C\angle.$$

Minthogy $CA_1D\angle \neq AD_1C\angle$, azért $CA_1M\angle \neq CD_1M'\angle$ és így M és M' különböző pontok. Most az AA_1 és DD_1 transzverzálisok nem metszhetik egymást, mert két különböző síkban fekszenek úgy, hogy nem mennek keresztül a két sík közös egyenesének, AD -nek ugyanazon pontján.

Ha tehát a tetraéder nem izogónikus, a szóbanforgó transzverzálisok nem metszik egymást. (Kitérő egyenesek!)

Weisz Alfréd (Bolyai g. VIII. o. Bp. V.)

Jegyzet. Kimutathatjuk azt is, hogyha a tételben szereplő transzverzálisok egy ponton mennek keresztül, akkor a tetraéder izogónikus.

Ha ugyanis AA_1 és DD_1 metszik egymást, akkor ezek síkja a BC élt az M pontban metszi és – az előbbiek szerint – $MA_1C\angle = MD_1C\angle$. Az AA_1 és BB_1 transzverzálisok is metszik egymást; síkjuk a CD élt az N pontban metszi és így $CB_1N\angle = CA_1N\angle$.

Azonban Bang-fétele szerint $AD_1C\angle = AB_1C\angle$ és így ezek mellékszögei is egyenlők, t. i. $MD_1C\angle = CB_1N\angle$. Ezért egyszersmind $MA_1C\angle = CA_1N\angle$,

¹Egy pontból a gömbhöz húzott érintő-darabok egyenlők!

azaz CA_1 felezi az MA_1N ill. BA_1D -et.

Hasonlóan: DA_1 felezi a BA_1C -et és BA_1 felezi a CA_1D -et Ebből következik 1.^o szerint, hogy

$$BA_1C\measuredangle - CA_1D\measuredangle = DA_1B\measuredangle = 120^\circ.$$

Ugyanez áll a többi lapokon is, a beírt gömb érintési pontjait illetően, tehát a tetraéder izogónikus.

Weisz Alfréd (Bolyai g. VIII. o., Bp. V.)