



A és C a négyzet szemben fekvő csúcsai. A négyzet oldala legyen x és $ABP\angle = \varphi$. Ezekkel az $ABP\triangle$ -ből

$$\cos \varphi = \frac{b^2 + x^2 - a^2}{2bx},$$

a $BCP\triangle$ -ből

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi) &= \sin \varphi = \frac{b^2 + x^2 - c^2}{2bx}. \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi &= \\ &= \left(\frac{b^2 + x^2 - a^2}{2bx} \right)^2 + \left(\frac{b^2 + x^2 - c^2}{2bx} \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

A tört eltávolítása, négyzetreemelés és rendezés után:

$$2x^4 - 2(c^2 + a^2)x^2 + (b^2 - c^2)^2 + (b^2 - a^2)^2 = 0.$$

Innen

$$x^2 = \frac{(a^2 + c^2) + \sqrt{(a^2 + c^2)^2 - 2[(b^2 - c^2)^2 + (b^2 - a^2)^2]}}{2}.$$

Feltéve, hogy a gyökök valósak, azaz

$$\Delta \equiv (a^2 + c^2)^2 - 2[(b^2 - c^2)^2 + (b^2 - a^2)^2] \geq 0,$$

x^2 mindkét értéke pozitív, mert szorzatuk és összegük is pozitív. Kérdés, hogy melyik felelhet meg a feladatnak?

A geometriai viszonyokat tekintve az $APC\triangle$ a P -nél tompaszögű,¹ tehát kell, hogy

$$AC^2 > \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 \quad \text{azaz} \quad 2x^2 > a^2 + c^2$$

legyen. Ebből következik, hogy a négyzet területe

$$x^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(a^2 + c^2)^2 - 2[(b^2 - c^2)^2 + (b^2 - a^2)^2]}.$$

Vizsgáljuk már most, mi a feltétele annak, hogy x^2 valós legyen? Ha a Δ discrimináns kifejezésében kijelölt négyzetreemeléseket elvégezzük és összevonunk, akkor

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv 4a^2c^2 - (2b^2 - a^2 - c^2)^2 \equiv (2ac + 2b^2 - a^2 - c^2)(2ac - 2b^2 + a^2 + c^2) \equiv \\ &\equiv [2b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - 2b^2]. \end{aligned}$$

$\Delta \geq 0$, ha mindkét tényezője egyenlő előjelű, azaz

1^o. ha

$$(a + c)^2 \geq 2b^2 \quad \text{és} \quad 2b^2 \geq (a - c)^2,$$

2^o. ha

$$(a + c)^2 \leq 2b^2 \quad \text{és} \quad 2b^2 \leq (a - c)^2.$$

Azonban a 2^o. eset, t. i.

$$(a + c)^2 \leq 2b^2 \leq (a - c)^2$$

nem lehetséges; mert $(a + c)^2$ nem lehet kisebb, mint $(a - c)^2$.

Csakis az 1^o. lehetséges, amidőn

$$(a + c)^2 > 2b^2 \geq (a - c)^2,$$

azaz ha az egyenlőségi jelnek megfelelő határeseteket nem tekintjük, a , c , $b\sqrt{2}$ egy háromszög oldalai.

Ha $a = b = c$, akkor $x^2 = 2a^2$, ill. $x = a\sqrt{2}$. Ez csak akkor állhat elő, ha P a négyzet középpontja.

¹T. i. $APC\angle > ABC\angle = 90^\circ$.