Az $y^2 = 2px$ parabola $(x_0; y_0)$ pontjában húzott érintő irányhatározója: $\frac{p}{y_0}$, tehát a normálisé: $-\frac{y_0}{p}$. Az $M\ (x_0, y_0)$ ponthoz tartozó normális egyenlete:

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0) \text{ vagy } y - y_0 = -\frac{y_0}{p}\left(x - \frac{y_0^2}{2p}\right).$$

Legyen $-\frac{y_0}{p} = m$, tehát $y_0 = -pm$, azaz a normális egyenletébe az y_0 paraméter helyett vezessük be a normális irányhatározóját paraméterként. Így a normális egyenlete

$$y + pm = m\left(x - \frac{pm^2}{2}\right) \text{ vagy } y = m(x - p) - \frac{pm^3}{2}.$$

Helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját a parabola gyújtópontjába, de a tengelyek iránya ugyanaz maradjon. Az új koordináták és ez eredetiek között

$$x' = x - \frac{p}{2}, \quad y' = y, \quad \text{ill.} \quad x = x' + \frac{p}{2}, \quad y' = y$$

transzformációs kapcsolatok állanak fenn és így az új koordinátarendszerben a normális egyenlete

$$y' = m\left(x' - \frac{p}{2}\right) - \frac{pm^3}{2},$$

ill. a vesszős jelzést elhagyva,

(1) $$y = m\left(x - \frac{p}{2}\right) - \frac{pm^3}{2} \ldots$$

A gyújtóponton átmenő és a normálisra merőleges egyenes egyenlete:

(2) $$y = -\frac{1}{m}x \ldots$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló rendszert megoldva, a két egyenes metszőpontjának koordinátáit kapjuk, mint m függvényeit. Ha pedig az m paramétert kiküszöböljük a két egyenletből, a metszéspont koordinátái között kapunk összefüggést, mely a keresett mértani hely egyenlete. (2)-ből $m = -\frac{x}{y}$. Ezt (1)-be helyettesítve:

$$y = -\frac{x}{y}\left(x - \frac{p}{2}\right) + \frac{p}{2}\frac{x^3}{y^3} \quad \text{vagy} \quad y^4 + x^2y^2 - \frac{p}{2}xy^2 - \frac{p}{2}x^3 = 0,$$

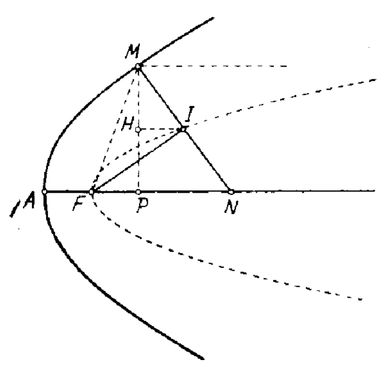
ill.

(3) $$y^2\left(y^3 - \frac{p}{2}x\right) + x^2\left(y^2 - \frac{p}{2}x\right) \equiv \left(x^2 + y^2\right)\left(y^2 - \frac{p}{2}x\right) = 0 \ldots$$

A szóbanforgó mértani hely eszerint két részből áll: az egyik rész $x^2 + y^2 = 0$ egyenletnek felel meg és ez nem más, mint maga a gyújtópont (ill. a gyújtóponton átmenő képzetes egyenespár). A másik rész az $y^2 - \frac{p}{2}x = 0$ egyenletnek megfelelő parabola, melynek csúcspontja az eredeti parabola gyújtópontja és paramétere $\frac{p}{4}$ az eredeti paraboláénak negyedrésze.

Krisztonosich Jenő (Szent László g. VIII. o. Bp. X.).

II. Megoldás. Az előbbi eredményt szintétikus geometriai eljárással világítjuk meg. Legyen I az F gyújtópont vetülete az MN normálison. Minthogy $FM = FN$, az I felezi MN-t. Ha MP felezőpontja H, akkor $HI \parallel PN$ és $HI = \frac{1}{2}, \quad PN = \frac{1}{2}p$.



A parabola pontjaihoz tartozó (MP) ordináták felezőpontjai azonban ugyancsak parabolát írnak le, melynek csúcsa az adott paraboláéval közös (A) és paramétere $\frac{p}{4}$. Ha ezen parabolát főtengelyével párhuzamosan eltoljuk és az eltolás mértéke $HI = \frac{p}{2}$, akkor megkapjuk az I pont mértani helyét, oly parabolát, melynek csúcsa F, paramétere $\frac{p}{4}$ és tengelye az adott paraboláéval közös.

Sauer Jenő (Bencés g. VII. o. Győr.)