

Egyenletünk aequivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\sqrt{x+1} = u, \quad \sqrt{2x+1} = v, \quad u - v = m,$$

ill.

$$(1) \quad x+1 = u^2, \quad 2x+1 = v^2, \quad u - v = m \dots$$

ahol

$$u > 0, \quad v > 0.$$

$v$  kiküszöbölésével:

$$(2) \quad v = u - m, \quad x+1 = u^2, \quad 2x+1 = (u-m)^2 \dots$$

vagy

$$(3) \quad v = u - m, \quad x = u^2 - 1, \quad f(u) \equiv u^2 + 2mu - m^2 - 1 = 0 \dots$$

ahol

$$(4) \quad u > 0 \text{ és } u - m > 0, \text{ azaz } u > m \dots$$

Meg kell oldanunk tehát a (3) egyenletet  $u$ -ra nézve, a (4) feltételek tekintetbe vételével.

I. Legyen  $m < 0$ . Ekkor, ha  $u > 0$  ki van elégítve,  $u > m$ . Ha azonban  $m < 0$ , akkor a (3) egyenletnek mindig van két valós gyöke, ellenkező előjellel; ezek között a pozitív

$$u = -m + \sqrt{2m^2 + 1}$$

és így

$$x = u^2 - 1 = 3m^2 - 2m\sqrt{2m^2 + 1}.$$

II.  $m = 0$  esetben (3)-ból:

$$f(u) = u^2 - 1 = 0.$$

Mínthogy

$$u > 0, \quad u = 1 \text{ és } x = u^2 - 1 = 0.$$

III.  $m > 0$ . Most elegendő az  $u > m$  feltételt kielégíteni, mert ekkor  $u > 0$ . Mínthogy a (3) egyenletnek valós gyökei vannak, ellenkező előjellel, csak az egyik: a pozitív felelhet meg, ha  $m$ -nél nagyobb.

Az  $f(u)$  az  $u$  oly másodfokú függvénye, mely a zérus helyek között negatív. A pozitív zérus hely nagyobb  $m$ -nél, ha

$$f(m) < 0, \text{ azaz } 2m^2 - 1 < 0, \text{ tehát } 0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Eszerint, ha  $m$  kielégíti ezen feltételt, akkor

$$u = -m + \sqrt{2m^2 + 1} \text{ és } x = 3m^2 - 2m\sqrt{2m^2 + 1}.$$

Összefoglalva: ha  $m$  változik  $-\infty$ -tól  $+\frac{\sqrt{2}}{2}$ -ig, az egyenletnek egy megoldása van. Ha  $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , akkor  $x = -\frac{1}{2}$ .

Ha pedig  $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , az egyenletnek nincs megoldása.

Freud Géza (Berzsenyi g. VI. o. Bp. V.)

Jegyzet: Vizsgáljuk az

$$y = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}$$

függvény változását. Valós értékeket csak akkor kapunk, ha  $x \geq -\frac{1}{2}$ , azaz a függvény értelmezési tartománya  $x = -\frac{1}{2}$ -től  $x = +\infty$ -ig terjed.

Ha  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $x = 0$  helyen  $y = 0$ ; ha  $x = +\infty$ ,  $y = -\infty$ .

A függvény az előbb kijelölt intervallumban folytonos és *állandóan fogy*, mert differenciálhányadosa

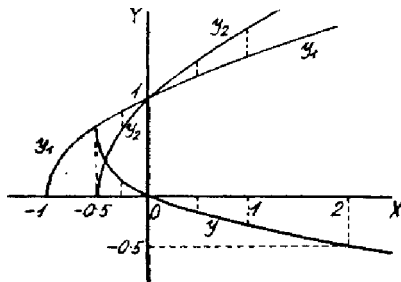
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} < 0, \text{ ha csak } x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ helyen } y' = -\infty.$$

Ábrázoljuk a következő két parabolának az  $X$ -tengely feletti részét:

$$a) \quad y_1 = \sqrt{x+1}, \quad b) \quad y_2 = \sqrt{2x+1}.$$

Az  $a)$  alatti csúcsa az  $(x = -1, y = 0)$  pont, a  $b)$  alattié  $x = -\frac{1}{2}, y = 0$ . A két parabolaág az  $x = 0, y = 1$  pontban metszi egymást.



Ha az  $a)$  alatti parabola pontjaihoz tartozó ordinátákból kivonjuk a  $b)$  alatti parabola megfelelő pontjainak ordinátáit és ezen különbségeket az  $X$ -tengelyre merőlegesen felmérjük (a megfelelő  $x$ -helyen), az így nyert ordináták végpontjai az

$$y = \sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}$$

görbét adják.

Ezen görbe pontjaihoz tartozó ordináták  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ -től 0-ig, azután 0-tól  $-\infty$ -ig változnak.

Ha az  $X$ -tengellyel  $y = m$  párhuzamos egyenest húzunk, akkor ezen egyenes a görbét egy- és csakis egy pontban metszi, hacsak  $0 \leq m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ill.  $m < 0$ .