

Legyen

$$x = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}, \quad y = \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}.$$

Ekkor

$$(1) \quad x^3 + y^3 = (9 + 4\sqrt{5}) + (9 - 4\sqrt{5}) = 19 \dots$$

$$(2) \quad xy = \sqrt[3]{81 - (4\sqrt{5})^2} = \sqrt[3]{81 - 80} = 1 \dots$$

Már most

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = z^3 - 3z,$$

ha t.i. $x + y = z$ helyettesítéssel élünk és így (1) alapján

$$(3) \quad z^3 - 3z - 18 = 0 \dots$$

Azonban

$$z^3 - 3z - 18 = (z - 3)(z^2 + 3z + 6),$$

tehát

$$(4) \quad (z - 3)(z^2 + 3z + 6) = 0 \dots$$

A (4) szerint z -nek 3 értéke van: $z_1 = 3$; a másik kettő a

$$z^2 + 3z + 6 = 0$$

egyenlet gyökei; ezek azonban komplex számok, holott a két köbgyök valós szám. Eszerint z -nek csak a valós értéke: $z_1 = 3$ jöhet tekintetbe, úgy, hogy

$$z = x + y = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = 3.$$

Szilágyi Sándor és Vásárhelyi Nagy Sándor
(Kegyesrendi g. VII. o. Sátoraljaújhely.)

Jegyzet: Többen megállapították, hogy

$$9 + 4\sqrt{5} = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^3; \quad 9 - 4\sqrt{5} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^3.$$

Eszerint

$$\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 3.$$