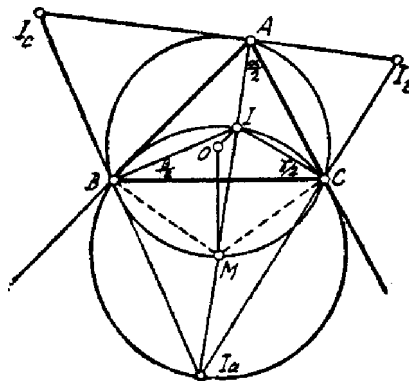


Legyen a keresett háromszög $ABC\Delta$.

Az I és I_a középpontok az A csúsnál fekvő α szöget felező egyenesen fekszenek. I a belső szögfelezők közös pontja; I_a az α szöget, a β és γ mellékszögeit felező egyenesek közös pontja, tehát $BI_a \perp BI$ és $CI_a \perp CI$, azaz B és C az II_a átmérőjű körön fekszenek. Legyen ezen kör középpontja M (az II_a távolság felezőpontja).



Kimutatjuk, hogy M az $ABC\Delta$ köré írt körön fekszik.

Ugyanis

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},^1$$

és így

$$\angle BI_aC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

minthogy IBI_aC húrnégyszög az II_a átmérőjű körben. Ezen körben a $\angle BMC$ ugyanazon ívhez tartozó középponti szög, amelyhez a $\angle BI_aC$ mint kerületi szög tartozik, tehát

$$\angle BMC = 2\angle BI_aC = 180^\circ - \alpha.$$

Ebből következik, hogy M az $ABC\Delta$ köré írt körön fekszik (felezi ezen kör $\widehat{BC}$ ívét), azaz $OM = OB = OC$.

Eszerint B és C az II_a átmérőhöz tartozó körnek és az O középpontú, OM sugarú körnek a közös pontjai. Az A csúcs az II_a egyenesnek és az utóbbi körnek (az M -en kívüli) második közös pontja. Ezek alapján a szerkesztés el is végezhető és az így nyert $ABC\Delta$ megfelel. Ugyanis: 1) az O és M középpontú körök közös húrja, BC , merőleges az OM centrálisra; tehát M az O kör BC ívének felezőpontja.

2) AI keresztlátszik az $ABC\Delta$ köré írt kör BC ívének M felezőpontján, tehát AI felezi az α szöget.

3) IC felezi a $\angle BCA = \gamma$ szöget. T. i. $MI = MC$ és így $\angle MIC = \angle MCI$. Másrészt²

$$\angle MIC = \frac{\alpha}{2} + \angle ACI, \text{ azaz } \angle ACI = \angle MIC - \frac{\alpha}{2}.$$

$$\angle MCI = \angle MCB + \angle BCI = \frac{\alpha}{2} + \angle BCI, \text{ azaz } \angle BCI = \angle MCI - \frac{\alpha}{2};$$

ezekből következik $\angle ACI = \angle BCI$, azaz CI felezi a γ szöget. Eszerint I valóban a beírt kör, és mivel $CI_a \perp CI$, I_a a hozzáírt kör középpontja.

Vizsgáljuk még a szerkesztés lehetőségének feltételét! Az O , I , I_a pontok úgy helyezkednek el, hogy I a háromszög köré írt körön belül, I_a e körön kívül fekszik; azaz szükséges és elegendő, hogy

$$OI < OM < OI_a$$

legyen. Rögzítsük az I , I_a pontokat és így az M pontot is; húzzuk meg azt az egyenest, mely az IM távolságot merőlegesen felezi. Akkor az O pontnak a sík azon részében kell feküdnie, amelyben az I van. Ekkor valóban

$$OI < OM < OI_a,$$

és a két kör, t. i. az O és M középpontú körök tényleg metszik egymást.

Schreiber Béla (izr. g. VIII. o. Bp.)

II. Megoldás. Ismeretes, hogy valamely háromszög magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői. Az $ABC\Delta$ a hozzá tartozó $I_aI_bI_c\Delta$ -re nézve talpponti háromszög, mert

$$I_aA \perp I_bI_c, \quad I_bB \perp I_cI_a, \quad I_cC \perp I_aI_b,$$

¹L. ezen évf. 6. számában, az 1223. gyakorlatot! (1938/2 167. old. –a szerk.)

²L. az 1223. gyakorlat II. megoldását.

azaz I_aA , I_bB , I_cC az $I_aI_bI_c\Delta$ magasságvonalai és így I az $I_aI_bI_c\Delta$ magassági pontja. Az $ABC\Delta$ köré írt kör középpontja eszerint az $I_aI_bI_c\Delta$ -re nézve Feuerbach-körének középpontja. Vagyis: az $I_aI_bI_c\Delta$ -re nézve adva van egyik csúcsa, pl. I_a , magassági pontja, I , és Feuerbach-körének középpontja, O . Az IO egyenes az $I_aI_bI_c\Delta$ Euler-egyenes.

A Feuerbach-kör, mint már több ízben láttuk, keresztülmegy a magasságok azon szeletének felezőpontján, mely a csúcs és a magassági pont között van; a jelen esetben tehát az II_a távolság M felezőpontján.

Ezen tulajdonságok alapján úgy az $I_aI_bI_c\Delta$, mint az $ABC\Delta$ megszerkeszthető.