

I. Megoldás. Minthogy $\cos \frac{6\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7}$,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= -\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \frac{-\sin \frac{2\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = \\ &= -\frac{\sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{4 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Szentmiklósi László (Kossuth Lajos g. VIII. o. Pestszenterzsébet).

Jegyzet. Az $A = \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$ szorzat átalakítható így is:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\cos 3\alpha + \cos \alpha) \cos 3\alpha = \frac{1}{2}(\cos^2 3\alpha + \cos \alpha \cos 3\alpha) = \\ &= \frac{1}{4}(1 + \cos 6\alpha + \cos 4\alpha + \cos 2\alpha). \end{aligned}$$

Ha $\alpha = \frac{2\pi}{7}$, akkor az 1372. feladat szerint

$$\cos 6\alpha + \cos 4\alpha + \cos 2\alpha = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

és így

$$A = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}.$$

Fonó Péter (Verbőczy István g. VII. o. Bp. I.).

II. Megoldás. Ismeretes, hogy

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Az

$$(4) \quad x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \dots$$

egyenlet gyökei: $\cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

A (4) egyenlet ú. n. reciprok egyenlet, mely x^3 -ével való osztás útján

$$(5) \quad \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 = 0 \dots$$

alakra hozható. Legyen most $x + \frac{1}{x} = y$,

$$\text{tehát} \quad y^3 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \left(x + \frac{1}{x} \right), \text{ azaz } x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,$$

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \quad \text{és így} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Helyettesítve ezeket (5)-be:

$$(6) \quad y^3 - 3y + y^2 - 2 + y + 1 = 0 \quad \text{vagy} \quad y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \dots$$

A (6) egyenlet gyökei:

$$y = x + \frac{1}{x} = \left(\cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7} \right) + \left(\cos \frac{2k\pi}{7} - i \sin \frac{2k\pi}{7} \right) = 2 \cos \frac{2k\pi}{7}$$

jelentéssel bírnak, ahol $k = 1, 2, 3$ (vagy $k = 4, 5, 6$).

A (6) egyenlet gyökeinek szorzata:

$$2 \cos \frac{2\pi}{7} \cdot 2 \cos \frac{4\pi}{7} \cdot 2 \cos \frac{6\pi}{7} = 1, \text{ azaz } \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

Sebestyén Gyula (Fazekas Mihály g. VIII. o. Debrecen).

¹ $\frac{1}{x} = x^{-1} = \cos \frac{2k\pi}{7} - i \sin \frac{2k\pi}{7} = \cos \frac{2(7-k)\pi}{7} + i \sin \frac{2(7-k)\pi}{7}.$