

Tetszőleges derékszögű koordinátarendszerben az A_i koordinátái (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Az M pont koordinátái legyenek (x, y) . Az M pont azon tulajdonsággal bír, hogy reá nézve az

$$(1) \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \dots$$

függvénynek minimuma van, tehát x és y kielégítik az $f'_x(x, y) = 0$ és $f'_y(x, y) = 0$ egyenleteket, azaz

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0 \dots \quad \text{és}$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_i - y}{\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}} = 0 \dots$$

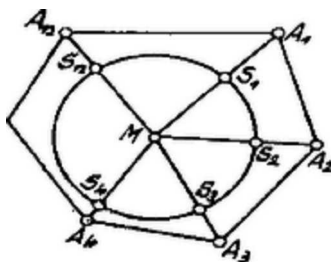
A (2) baloldalán álló egy-egy tag jelenti azon α_i szög cosinusát, melyet MA_i az X tengellyel alkot, a (3) baloldala ugyanezen szög sinusát, tehát

$$(2a) \quad \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i = 0 \dots$$

$$(3a) \quad \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i = 0 \dots$$

Az MA_i egyenesen M -től r távolságban felvett S_i koordinátái legyenek x'_i, y'_i ; nyilván

$$(4) \quad x'_i = x + r \cos \alpha_i, \quad y'_i = y + r \sin \alpha_i \dots$$



Az S_i pontokban elhelyezett egyenlő tömegek súlypontjának koordinátái legyenek ξ, η . Ekkor

$$\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x'_i = \frac{1}{n} \left(nx + r \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i \right) = x,$$

mert $\sum_{i=1}^n \cos \alpha_i = 0$. Hasonlóan

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y'_i = \frac{1}{n} \left(ny + r \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i \right) = y,$$

mert $\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i = 0$. Eszerint az S_i pontokban elhelyezett egyenlő tömegek súlypontja valóban az $M(x, y)$ pont!

Weisz Alfréd (Bolyai g. VIII. o., Bp. V.)

Jegyzet. Az M pont az S_i pontokat illetőleg is azon tulajdonsággal bír, hogy $\sum \overline{MS_i}$ minimum; ugyanis

$$\frac{x'_i - x}{r} = \cos \alpha_i \quad \text{és így} \quad \sum_{i=1}^n \frac{x'_i - x}{\sqrt{(x'_i - x)^2 + (y'_i - y)^2}} = \sum_{i=1}^n \cos \alpha_i = 0.$$

Hasonlóan

$$\sum_{i=1}^n \frac{y'_i - y}{\sqrt{(x'_i - x)^2 + (y'_i - y)^2}} = \sum_{i=1}^n \sin \alpha_i = 0,$$

azaz: ha egy húrsokszög csúcsainak éppen a körülírt kör középpontjától számított távolság összege a minimális, akkor ez a pont egyszersmind a sokszög csúcsaiba helyezett egyenlő tömegeknek a súlypontja.