

Az A koordinátái kielégítik a kör egyenletét. Ha $x = 1$, akkor

$$4y^2 - y - 18 = 0; \text{ innen } y = \frac{1 \pm 17}{8}. \text{ Mivel } y < 0, \quad y = -2.$$

Hasonlóan a B pontra nézve, ha $x = 2$,

$$4y^2 - y - 14 = 0; \text{ innen } y = \frac{1 \pm 15}{8}. \text{ Mivel } y > 0, \quad y = +2.$$

Eszerint az A koordinátái $(1, -2)$; a B ponté $(2, 2)$.

A keresett harmadfokú parabola egyenlete:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \dots$$

Itt az a, b, c, d együtthatók ismeretlenek, ezeket kell a feltételek alapján meghatároznunk; tehát 4 egyenletre van szükségünk. A parabola kerestülmege az $A(1, -2)$ és $B(2, 2)$ pontokon; ezek tehát kielégítik a parabola egyenletét, azaz:

$$(1) \quad -2 = a + b + c + d \dots$$

$$(2) \quad +2 = 8a + 4b + 2c + d \dots$$

A parabolának és a körnek A -ban közös érintője van. A kör O_1 középpontjának koordinátái: $1, \frac{1}{8}$, azaz A abszcissája megegyezik O_1 abszcissájával; ebből következik, hogy a kör érintője A -ban párhuzamos az X -tengellyel, irányhatározója $= 0$. A kör sugara $2\frac{1}{8}$.

A parabola irányhatározója: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ha már most $x = 1$, akkor $y' = 0$, azaz

$$(3) \quad 3a + 2b + c = 0 \dots$$

A (2) egyenlet tagjaiból kivonva a (2) és (3) megfelelő tagjait, keletkezik:

$$(3a) \quad 4a + b = 4, \quad b = 4(1 - a) \text{ és így } c = 5a - 8 \dots$$

Már most határozzuk meg a parabola inflexiós érintőjét. Az inflexiós pontra nézve

$$y'' = 6ax + 2b = 0, \quad x_i = -\frac{b}{3a}$$

és így

$$y'_i = 3a \left(-\frac{b}{3a} \right)^2 + 2b \left(-\frac{b}{3a} \right) + c = \frac{b^2}{3a} - \frac{b^2}{3a} + c = c - \frac{b^2}{3a}.$$

Helyettesítve ide b és c (3a) alatti értékeit:

$$y'_i = 5a - 8 - \frac{(4 - 4a)^2}{3a} = \frac{15a^2 - 24a - 16 + 32a - 16a^2}{3a} = \frac{-a^2 + 8a - 16}{3a}$$

$$(3b) \quad y'_i = -\frac{(a - 4)^2}{3a} \dots$$

Az AB egyenes irányhatározója: $\frac{2+2}{1} = 4$.

Az inflexiós érintő AB -hez való hajlásszögének tangense:

$$\frac{y'_i - 4}{1 + 4y'_i} = \frac{7}{11} \text{ és innen } y'_i = -3, \text{ tehát}$$

$$(4) \quad -\frac{(a - 4)^2}{3a} = -3, \quad (a - 4)^2 = 9a, \quad a^2 - 17a + 16 = 0 \dots$$

Eszerint a -ra két értéket kapunk:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 16.$$

I. Ha $a_1 = 1$, akkor $b_1 = 0$, $c_1 = -3$ és pl. (1)-ből $d_1 = 0$.

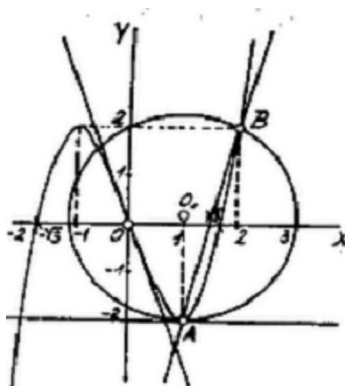
Az egyik parabola eszerint $y = x^3 - 3x$.

Most $y' = 3x^2 - 3$ és $y'' = 6x$.

Az inflexiós pont az origo.

A függvény ábrázolása a köv. táblázat alapján végezhető:

x	$-\infty$	$\dots$	$-\sqrt{3}$		-1		0		$+1$		$\sqrt{3}$		2	$\dots$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2 max.	$\searrow$	0 infl.	$\searrow$	-2 min.	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$



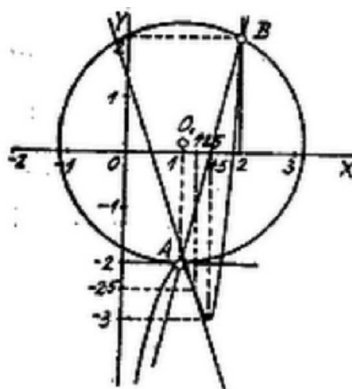
II. $a_2 = 16$ mellett $b_2 = -60$, $c_2 = 72$, $d_2 = -30$. Így

$$y = 16x^3 - 60x^2 + 72x - 30$$

$$y' = 48x^2 - 120x + 72, \quad y'' = 96x - 120.$$

A függvény ábrázolását a köv. táblázat segítségével végezhetjük:

x	$-\infty$		0		1		$1,25$		$1,5$		2	$\dots$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-30	$\nearrow$	-2 max.	$\searrow$	$-2,5$ infl.	$\searrow$	-3 min.	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$



A függvénynek csak egy zérus helye van: 1,5 és 2 között.

Kádár Géza (Dobó István g. VIII. o., Eger)