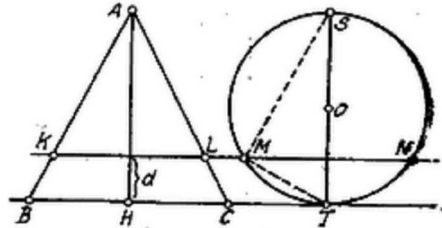


1⁰. A körből kimetszett húr fele, $\frac{1}{2}MN$ mértani középárányosa a reá merőleges átmérő két szeletének. Az egyenlőszárú háromszögben $AKL\triangle \sim ABC$. Így a következőket írhatjuk:

$$(1) \quad \frac{MN^2}{4} = d(2R - d) \dots \text{ és}$$

$$(2) \quad KL : BC = (2R - d) : AH \dots$$

Míthogy $BC = AH$, (2)-ből $KL = 2R - d$.



A feladat követelménye pedig: $KL = MN$ tehát

$$(3) \quad (2R - d)^2 = 4d(2R - d) \dots$$

Ezen egyenlet egyik megoldása $2R - d = 0$, vagyis $d = 2R$; ekkor $KL = MN = 0$. Ha pedig $d \neq 2R$, akkor

$$2R - d = 4d \text{ ill. } d = \frac{2R}{5}.$$

2⁰. A változó d jele legyen x . Ennek függvénye $y = KL - MN$, tehát, $2R = 1$ tekintetbevételével

$$(4) \quad y = 1 - x - 2\sqrt{x(1 - x)} \dots$$

$x = 0$ mellett $y = 1$. (Ekkor $KL = BC = 1$, és $MN = 0$).

$x = 1$ helyen, amint 1⁰. alatt láttuk: $y = 0$. Továbbá $y = 0$, ha $x = \frac{1}{5}$.

Az y függvény értelmezési tartománya, a négyzetgyök valós értékére való tekintettel: 0 és 1 között van, azaz $0 \leq x \leq 1$. Ezen közben y az x -nek folytonos és mivel a négyzetgyököknek csak pozitív értéket vesszük, egyértékű függvénye. Hogy változását vizsgáljuk, képezzük y differenciálhányadosát:

$$(5) \quad y' = -1 - \frac{1 - 2x}{\sqrt{x(1 - x)}} \dots$$

Ha $x = 0$, $y' = -\infty$. Ha x növekedik, $y' < 0$ mindaddig, amíg

$$(6) \quad \frac{1 - 2x}{\sqrt{x(1 - x)}} = -1 \dots$$

lesz. Ezután $y' > 0$ és $x = 1$ helyen $+\infty$. Ebből következik, hogy a (6) egyenlet által meghatározott x helyen a függvénynek minimuma van. Míthogy a (6) egyenlet baloldalán a nevező pozitív, a tört előjele a számlálóléval egyezik meg, azaz $1 - 2x$ negatív, az egyenlet gyöke pedig: $x > \frac{1}{2}$ legyen.

Négyzetre emelve (6) mindkét oldalán:

$$\frac{(1 - 2x)^2}{x - x^2} = 1,$$

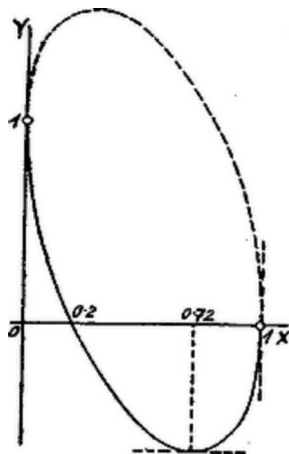
és rendezés után

$$(7) \quad 5x^2 - 5x + 1 = 0 \dots$$

Innen

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}, \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}.$$

Ezek közül csak $x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2}$, tehát az y függvénynek minimuma van az $x_2 \sim 0,72$ helyen.



A függvény változásának ábrázolására szolgáljon a következő táblázat:

x	0		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6		0,72		0,8	0,9		1
y	1	$\searrow$	0,3	0	-0,22	-0,38	-0,5	-0,58	$\searrow$	-0,62 min	$\nearrow$	-0,6	0,5	$\nearrow$	0
y'	$-\infty$	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	$+\infty$

Komlós János (Gr. Széchenyi István gy. r. VIII. o., Pécs)

Kiegészítés. A függvényt ábrázoló görbe egy ellipszisnek a fele, amelynek AB az átmérője; t. i. A és B párhuzamos érintők érintési pontjai.
 Ha a kör ST átmérőjének S végpontjából az $ABC\triangle$ AB és AC oldalával párhuzamosakat húzunk, akkor ezek meghatározzák a körön az M és N pontokat úgy, hogy $MN = KL$ lesz.