

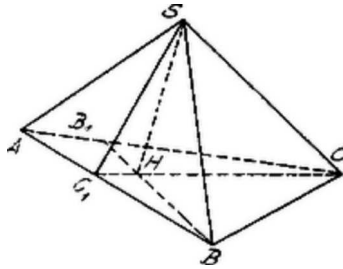
a) Induljunk ki abból az esetből, amidőn a tetraéder  $S$  csúcsában három, páronként egymásra merőleges él fut össze. Ilyenkor  $S$  a tetraéder magassági pontja, az  $S$  csúccsal szembenfekvő lapon  $ABC\triangle$  hegyesszögű háromszög tartozik lenni, <sup>1</sup> az  $S$  csúcsból az  $ABC$  lapra bocsátott magasság talppontja az  $ABC\triangle$  magassági pontja. Az  $ABC\triangle$  területének négyzete pedig egyenlő az oldallapok ( $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SCA$ ) területének négyzetösszegével. <sup>2</sup>

Ha az  $ABC\triangle$  magassági pontja  $H$ , az  $ABC\triangle$  magasságainak talppontjai (a háromszög megfelelő oldalain)  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , akkor, mivel  $SAA_1$ ,  $SBB_1$ ,  $SCC_1$  az  $S$ -nél derékszögű háromszögek,

$$\overline{SH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HA_1} = \overline{BH} \cdot \overline{HB_1} = \overline{CH} \cdot \overline{HC_1}$$

és

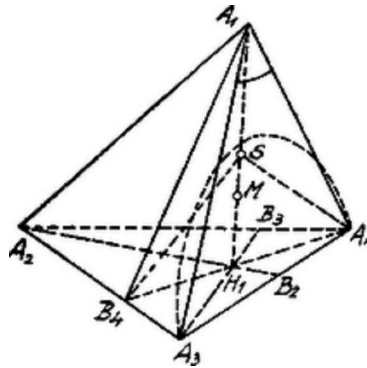
$$\overline{SA_1}^2 = \overline{A_1A} \cdot \overline{A_1H}, \quad \overline{SB_1}^2 = \overline{B_1B} \cdot \overline{B_1H} \\ \overline{SC_1}^2 = \overline{C_1C} \cdot \overline{C_1H}.$$



Megjegyezzük még, hogy az  $S$  csúcs az  $ABC$  síkra, a  $H$  pontban állított merőlegesnek és az  $ABC\triangle$  bármely oldalához, mint átmérőhöz tartozó gömb metszéspontja. (L. a 466. feladatban!)

b) Legyen már most, az  $A_1A_2A_3A_4$  oly orthocentrikus tetraéder, melynek minden határlapja hegyesszögű háromszög, tehát mindegyik testszöglete hegyes.

Az orthocentrikus tetraéderben mindegyik magasság talppontja a szembenfekvő határlapon, az illető határlap ill. határháromszög magassági pontja – hiszen az ilyen tetraéder szembenfekvő élei egymásra merőlegesek. (L. egyébként a II. évf. 179. oldalán a 110. feladatot!) Hegyesszögű háromszögben a magassági pont a háromszögön belül van; kell tehát, hogy a tetraéder magassági pontja a tetraéderen belül legyen.



Tekintsük pl. a tetraéder  $A_1H_1$  magasságát, ahol  $H_1$  az  $A_2A_3A_4\triangle$  magassági pontja. Már most pl. az  $A_3A_4$  élhez, mint átmérőhöz tartozó gömb az  $A_1A_3A_4$  lapot egy legnagyobb körben metszi úgy, hogy  $A_1$  ezen körön, ill. a gömbön kívül fekszik; <sup>3</sup> a gömb az  $A_1H_1$  magasságot oly  $S$  pontban metszi, mely  $A_1$  és  $H_1$  között fekszik és az  $SA_2A_3A_4$  tetraéder az a) alatti tulajdonságokkal bír, úgy hogy

$$\overline{A_1H_1}^2 > \overline{SH_1}^2 = \overline{A_iH_1} \cdot \overline{H_1B_i} \quad \text{és} \quad \overline{A_1B_i}^2 > \overline{SB_i}^2 = \overline{B_iA_i} \cdot \overline{B_iH_1}$$

<sup>1</sup>L. V. évfolyamunk 241. oldalán a 466. feladatban (1929/4. 241. old. – a szerk.)

<sup>2</sup>L. II. évfolyamunk 142. oldalán a 91. feladatban (1926/1. 142. old. – a szerk.).

<sup>3</sup>Ugyanis  $A_3A_1A_4\triangle$  hegyesszög! A tetraéder  $M$  magassági pontja  $S$  és  $H$  között fekszik. Ugyanis az  $A_1A_3A_4\triangle$  magassági pontja,  $H_2$ , az  $A_3A_4$  átmérő félkörön, ill. gömbön belül fekszik; ezen belül fekszik  $SH_1$  is. ( $S$  a gömbön!) Így a tetraéder  $A_2H_2$  magassága az  $A_1H_1$ -et csak  $S$  és  $H_1$  között metszheti (az  $M$  pontban).

ahol  $B_i$  az  $A_2A_3A_1\triangle A_i$  csúcsából kiinduló magasság talppontja ( $i = 2, 3, 4$ ).  
Eszerint

$$\begin{aligned}\overline{A_1B_2^2} &> \overline{B_2A_2} \cdot \overline{B_2H_1} \text{ vagy } \left(\frac{1}{2} A_1B_2 \cdot A_3A_4\right)^2 > \left(\frac{1}{2} A_3A_4 \cdot B_2A_2\right) \left(\frac{1}{2} A_3A_4 \cdot B_2H_1\right) \\ \overline{A_1B_3^2} &> \overline{B_3A_3} \cdot \overline{B_3H_1} \text{ ,, } \left(\frac{1}{2} A_1B_3 \cdot A_2A_4\right)^2 > \left(\frac{1}{2} A_2A_4 \cdot B_3H_3\right) \left(\frac{1}{2} A_2A_4 \cdot B_3H_1\right) \\ \overline{A_1B_4^2} &> \overline{B_4A_4} \cdot \overline{B_4H_1} \text{ ,, } \left(\frac{1}{2} A_1B_4 \cdot A_2A_3\right)^2 > \left(\frac{1}{2} A_2A_3 \cdot B_4A_4\right) \left(\frac{1}{2} A_2A_3 \cdot B_4H_1\right)\end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőtlenségek azt fejezik, hogy mindegyik oldallap területe nagyobb, mint az alaplap és az oldallap (az alaplapon való) vetületének mértani középárányosa, <sup>4</sup> azaz

$$\begin{aligned}t_{A_1A_3A_4}^2 &> t_{A_2A_3A_4} t_{A_3A_4H_1}, \quad t_{A_1A_2A_4}^2 > t_{A_2A_3A_4} \cdot t_{A_2A_4H_1}, \\ t_{A_1A_2A_3}^2 &> t_{A_2A_3A_4} \cdot t_{A_2A_3H_1}.\end{aligned}$$

Összeadva ezen egyenlőtlenségek megfelelő oldalait

$$t_{A_1A_3A_4}^2 + t_{A_1A_2A_4}^2 + t_{A_1A_2A_3}^2 > t_{A_2A_3A_4} (t_{A_3A_4H_1} + t_{A_2A_4H_1} + t_{A_2A_3H_1}).$$

A jobboldali zárójeles összeg azonban az  $A_2A_3A_4\triangle$  területét jelenti és így

$$t_{A_2A_3A_4}^2 < t_{A_1A_3A_4}^2 + t_{A_1A_2A_4}^2 + t_{A_1A_2A_3}^2.$$

Kimutattuk tehát, hogy ha az orthocentrikus tetraéder valamelyik testszöglete hegyes, akkor a szembenfekvő határlap területének négyzete kisebb, mint a többi lapokénak négyzetösszege!

c) Tegyük fel már most, hogy az  $A_1A_2A_3A_4$  orthocentrikus tetraéder olyan, hogy az  $A_1$  szöglet tompaszögű. Ekkor  $A_1$ -nek az alapélek bármelyikéhez, mint átmérőhöz tartozó gömb belsejében kell feküdnie <sup>5</sup> és ekkor  $A_1H_1 < SH_1$  (ahol  $S$  ugyanazt a pontot jelenti, mint  $b$ ) alatt). A  $b$ ) alatti egyenlőtlenségek értelme megváltozik, úgy hogy ezen esetben

$$t_{A_2A_3A_4}^2 > t_{A_1A_3A_4}^2 + t_{A_1A_2A_4}^2 + t_{A_1A_2A_3}^2,$$

azaz, ha a tetraéder egyik szöglete tompa, akkor az ezzel szembenfekvő határlap (területének) négyzete nagyobb, mint az oldallapok területének négyzetösszege.

Az ilyen tetraédernél a tetraéder magassági pontja a tetraéderen kívül esik. Ugyanis az  $A_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) csúcsból a szemközti határlapra bocsátott tetraédermagasság talppontja az illető határlap magassági pontja. Mivel pedig az  $A_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) csúccsal szembenfekvő határlap  $A_1$ -nél tompaszögű, ennek magassági pontja a háromszögön, ill. a tetraéderen kívül esik és így az  $A_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) csúcsokból kiinduló tetraéder-magasságok, ill. ezek metszéspontja, a tetraéder magassági pontja is a tetraéderen kívül esik.

Ezek alapján *kell*, hogy a feladatban foglalt tétel igaz legyen. Mert, ha mindegyik határlap (területének) négyzete kisebb a többi lapok négyzetösszegénél, akkor nem lehet, hogy az egyik szöglet derékszögű vagy tompaszögű legyen: az  $a$ ) ill.  $c$ ) eset állana elő a területek négyzetét illetően.

Ha pedig egyik határlap négyzete nagyobb a többiek négyzetösszegénél, akkor kell, hogy ezen határlappal szemben tompaszögű testszöglet legyen; mert ha nem az, akkor az  $a$ ) vagy  $b$ ) eset állana elő, a területek négyzetét illetően.

<sup>4</sup>  $A >$  jel helyett = áll elő, ha  $A_1$ -nél mindegyik élszög derékszög!

<sup>5</sup> Ha  $A_iA_1A_k <$  ( $i \neq k \pm 1$ ) tompaszög, akkor  $A_1$  az  $A_iA_k$  átmérőjű körön belül fekszik!