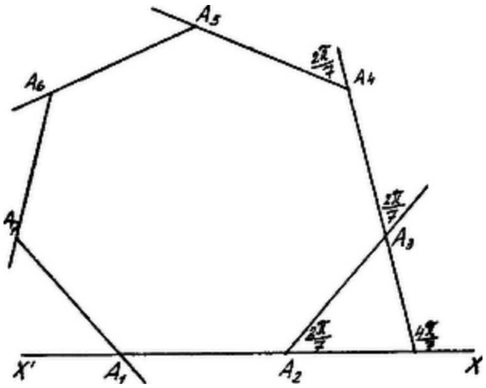
I. Megoldás. Ha egy zárt sokszög oldalait, ugyanazon forgás irányban haladva, egy egyenesre vetítjük, a vetületek algebrai összege zérus.

Alkalmazzuk ezen tételt a szabályos hétszögre úgy, hogy az összes oldalakat az egyik oldalát tartó $X'X$ egyenesre vetítjük, a pozitív forgás irányában haladva.



A szabályos hétszög mindegyik szöge $\pi-\dfrac{2\pi}{7}$.

Az első oldal és $X'X$ egyenes hajlásszöge 0; vetülete $a\cos 0$. A következő oldal hajlásszöge $X'X$-hez $\dfrac{2\pi}{7}$; vetülete $a\cos\dfrac{2\pi}{7}$. Minden következő oldal az előbbiből $\dfrac{2\pi}{7}$ mérőszámnak megfelelő szöggel fordul el, az $X'X$-hez való hajlásszög oldalról-oldalra haladva $\dfrac{2\pi}{7}$-vel növekszik. Eszerint a vetületek összege:

$$x=a\left(\cos 0+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}\right)=0\ldots \tag{1}$$

Azonban

$$\cos\frac{12\pi}{7}-\cos\left(2\pi-\frac{12\pi}{7}\right)=\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Hasonlóan

$$\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}\quad \text{és}\quad \cos\frac{8\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Eszerint a zárójelben foglalt összeg:

$$1+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=0,$$
$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

II. Megoldás. Az előbbi megoldásban kimutattuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{6}\cos\frac{2k\pi}{7}=\cos 0+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0.$$

Ha figyelemmel vagyunk arra, hogy az

$$x^7-1=0$$

egyenlet gyökei

$$\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\quad (k=0,1,2,\ldots 6)$$

alakban írhatók *és ezen gyökök összege zérus,* akkor

$$\sum_{k=0}^{6}\cos\frac{2k\pi}{7}=0\quad \text{és}\quad \sum_{k=0}^{6}\sin\frac{2k\pi}{7}=0.$$

Komlós János (Gr. Széchenyi István gy. r. VIII. o. Pécs)
Nagy Elemér (Ciszterci Szent Imre g. VIII. o. Bp. XI.)

III. Megoldás. Vizsgáljuk az általánosabb

$$S=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha \tag{1}$$

összeget, amelyben a szögek számtani haladványt alkotnak; a haladvány első tagja α, különbsége is α [1]. Szorozzuk az 1) minden tagját $2\sin\frac{\alpha}{2}$-vel. Ekkor

$$\begin{aligned}
2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}&=\sin\left(\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right),\\
2\cos 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}&=\sin\left(2\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\alpha}{2}\right),\\
2\cos 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2}&=\sin\left(3\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(3\alpha-\frac{\alpha}{2}\right),\\
&\ldots\ldots\\
2\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}&=\sin\left(n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(n\alpha-\frac{\alpha}{2}\right).
\end{aligned}$$

Minthogy $\alpha+\frac{\alpha}{2}=2\alpha-\frac{\alpha}{2},\quad 2\alpha+\frac{\alpha}{2}=3\alpha-\frac{\alpha}{2}$ s. i. t, a jobboldalon álló tagok az összegezésnél eltűnnek, kivéve kettőt, úgyhogy

$$2S\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left(n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}.$$

Az adott esetben $n=3$, $\alpha=\frac{2\pi}{7}$, tehát

$$2S\sin\frac{\pi}{7}=2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=-2\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=-\sin\frac{6\pi}{7}.$$

Azonban

$$\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\left(\pi-\frac{6\pi}{7}\right)=\sin\frac{\pi}{7},$$

és így

$$S=-\frac{1}{2}.$$

[1] Az ilyen összeg kiszámítását tetszőleges különbség esetére is, lásd IV. évfolyamunk 197. o. (Goldziher: Goniometrikus többtagúak).