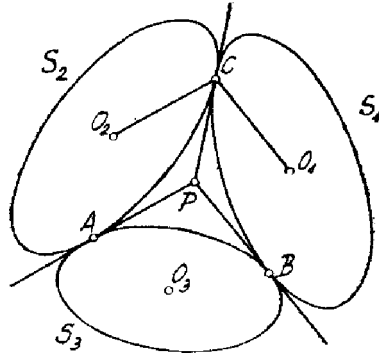


Előrebocsátjuk, hogy a kör érintője a kör síkjában fekszik. Ha két érintkező kör nem fekszik egy síkban, akkor közös érintőjük a két kör síkjának metszési vonala.

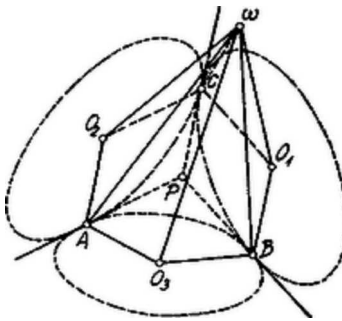
a) Ha a három kör közül kettő, k_1 és k_2 egy síkban (S) fekszik, akkor a harmadik kör, k_3 is az S síkban fekszik.

Ugyanis k_1 és k_3 közös érintője az S , k_2 és k_3 közös érintője is az S síkban fekszik. Ezen két érintő meghatározza a k_3 síkját, azaz S -t.

b) Ha két kör nem fekszik egy síkban, akkor a harmadik sem fekéldhetik az előbbieket egyikével sem egy síkban, ha a három érintkezési pont különböző: a három kör, k_1, k_2, k_3 (O_1, O_2, O_3 középpontokkal) a különböző S_1, S_2, S_3 síkokban fekszik. Két kör közös érintője síkjuknak metszésvonala; a három közös érintő egy triéder élei. A triéder csúcsa legyen P .

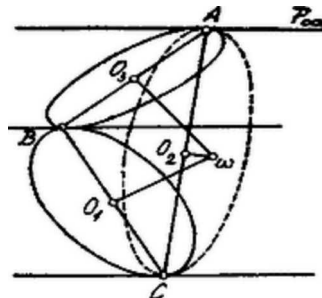


A k_1 és k_2 körök érintési pontja legyen C , a k_2 és k_3 köröké A , a k_3 és k_1 köröké B . Az O_1C és O_2C sugarak meghatároznak egy Σ_3 síkot, mely a PC közös érintőre merőleges.¹ Ha a Σ_3 síkban O_1C -re az O_1 -ben és O_2C -re az O_2 -ben merőlegest állítunk, ezek egy ω pontban metszik egymást. Már most $O_1\omega \perp S_1, O_2\omega \perp S_2$,² tehát ω a k_1 és k_2 körök minden pontjától egyenlő távolságban van: ω oly gömb középpontja, melynek gömbi körei k_1 és k_2 . A gömb sugara $\omega C = \omega B = \omega A = R$.



Már most az $O_1BO_3 \equiv \Sigma_2$ síkban az O_3 pontban, S_3 -ra merőleges egyenesnek metszenie kell az $O_1\omega$ egyenest; az $O_2AO_3 \equiv \Sigma_1$ síkban az O_3 pontban, S_3 -ra merőleges egyenesnek metszenie kell az $O_2\omega$ egyenest. Ez csak úgy lehetséges, ha $O_1\omega$ -t és $O_2\omega$ -t éppen az ω -ban metszi,³ azaz ω a k_3 kör minden pontjától $\omega B = \omega A = R$ távolságban van. Eszerint k_1, k_2, k_3 körök az (ω, R) gömbön fekszenek. Az ω a $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ síkoknak közös pontja; oly triéder csúcsa, melynek élei $\omega O_1, \omega O_2, \omega O_3$.

c) Ha P a végtelenben van, akkor a triéder éleiként szereplő közös érintők párhuzamosak (egy hasábos tér élei).



¹ Ugyanis $O_1C \perp PC$ és $O_2C \perp PC$.

² $O_1\omega \perp S_1$, mert: $\Sigma_3 \perp PC$, tehát PC merőleges a Σ_3 síkban fekvő bármely egyenesre; így $O_1\omega \perp PC$ és $O_1\omega \perp O_1C$. Hasonlóan következik: $O_2\omega \perp S_2$.

³ Ha az e_3 egyenes, mely nem fekszik az e_1 és e_2 egymást metsző egyenesek síkjában, metszi úgy az e_1 -et, mint az e_2 -t, akkor e_3 az e_1 és e_2 metszéspontján megy keresztül.

Egy kör két érintője akkor párhuzamos, ha az érintési pontok egy átmérő végpontjai. Jelen esetben tehát az $ABC\Delta$ oldalai a k_1, k_2, k_3 körök átmérői; a $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ síkok összeesnek az $ABC\Delta$ síkjával, tehát ω is ezen síkban van és nem más, mint az $ABC\Delta$ köré írt kör középpontja.

Weisz A.