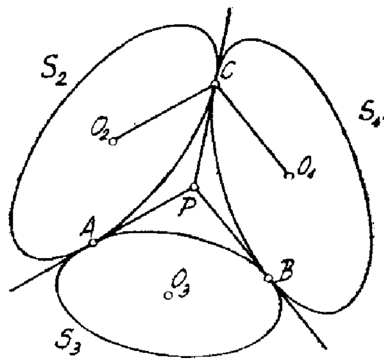
Előrebocsátjuk, hogy a kör érintője a kör síkjában fekszik. Ha két érintkező kör nem fekszik egy síkban, akkor közös érintőjük a két kör síkjának metszési vonala.

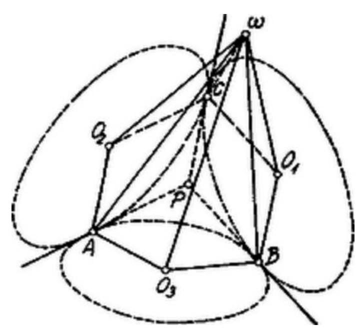
a) Ha a három kör közül kettő, k_1 és k_2 egy síkban (S) fekszik, akkor a harmadik kör, k_3 is az S síkban fekszik.

Ugyanis k_1 és k_3 közös érintője az S, k_2 és k_3 közös érintője is az S síkban fekszik. Ezen két érintő meghatározza a k_3 síkját, azaz S-t.

b) Ha két kör nem fekszik egy síkban, akkor a harmadik sem feküdhetik az előbbiek egyikével sem egy síkban, ha a három érintkezési pont különböző: a három kör, k_1, k_2, k_3 (O_1, O_2, O_3 középpontokkal) a különböző S_1, S_2, S_3 síkokban fekszik. Két kör közös érintője síkjuknak metszésvonala; a három közös érintő egy triéder élei. A triéder csúcsa legyen P.

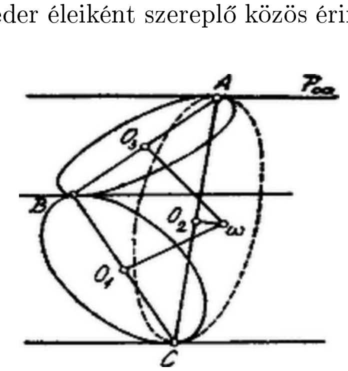


A k_1 és k_2 körök érintési pontja legyen C, a k_2 és k_3 köröké A, a k_3 és k_1 köröké B. Az O_1C és O_2C sugarak meghatároznak egy Σ_3 síkot, mely a PC közös érintőre merőleges.[1] Ha a Σ_3 síkban O_1C-re az O_1-ben és O_2C-re az O_2-ben merőlegest állítunk, ezek egy ω pontban metszik egymást. Már most $O_1\omega \perp S_1$, $O_2\omega \perp S_2$,[2] tehát ω a k_1 és k_2 körök minden pontjától egyenlő távolságban van: ω oly gömb középpontja, melynek gömbi körei k_1 és k_2. A gömb sugara $\omega C = \omega B = \omega A = R$.



Már most az $O_1BO_3 \equiv \Sigma_2$ síkban az O_3 pontban, S_3-ra merőleges egyenesnek metszenie kell az $O_1\omega$ egyenest; az $O_2AO_3 \equiv \Sigma_1$ síkban az O_3 pontban, S_3-ra merőleges egyenesnek metszenie kell az $O_2\omega$ egyenest. Ez csak úgy lehetséges, ha $O_1\omega$-t és $O_2\omega$-t éppen az ω-ban metszi,[3] azaz ω a k_3 kör minden pontjától $\omega B = \omega A = R$ távolságban van. Eszerint k_1, k_2, k_3 körök az (ω, R) gömbön feküsznek. Az ω a Σ_1, Σ_2, Σ_3 síkoknak közös pontja; oly triéder csúcsa, melynek élei ωO_1, ωO_2, ωO_3.

c) Ha P a végtelenben van, akkor a triéder éleiként szereplő közös érintők párhuzamosak (egy hasábos tér élei).



[1] Ugyanis $O_1C \perp PC$ és $O_2C \perp PC$.

[2] $O_1\omega \perp S_1$, mert: $\Sigma_3 \perp PC$, tehát PC merőleges a Σ_3 síkban fekvő bármely egyenesre; így $O_1\omega \perp PC$ és $O_1\omega \perp O_1C$. Hasonlóan következik: $O_2\omega \perp S_2$.

[3] Ha az e_3 egyenes, mely nem fekszik az e_1 és e_2 egymást metsző egyenesek síkjában, metszi úgy az e_1-et, mint az e_2-t, akkor e_3 az e_1 és e_2 metszéspontján megy keresztül.

Egy kör két érintője akkor párhuzamos, ha az érintési pontok egy átmérő végpontjai. Jelen esetben tehát az $ABC\triangle$ oldalai a k_1, k_2, k_3 körök átmérői; a Σ_1, Σ_2, Σ_3 síkok összeesnek az $ABC\triangle$ síkjával, tehát ω is ezen síkban van és nem más, mint az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontja.

Weisz A.