

I. Megoldás. Kimutatjuk, hogy

$$a_1!a_2!\dots a_n! < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)!$$

Ugyanis

$$a_1! = a_1!$$

$$a_2! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a_2 < (a_1 + 1)(a_1 + 2) \dots (a_1 + a_2) = \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1!},$$

$$a_3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a_3 < (a_1 + a_2 + 1)(a_1 + a_2 + 2) \dots (a_1 + a_2 + a_3) = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)!}{(a_1 + a_2)!},$$

.....,

$$a_n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a_n < \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)!}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})!}.$$

A megfelelő oldalakat szorozva:

$$a_1!a_2!a_3!\dots a_n! < a_1! \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1!} \cdot \frac{(a_1 + a_2 + a_3)!}{(a_1 + a_2)!} \dots \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)!}{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})!}.$$

A jobboldalon a számláló tényezői a nevezőben is előfordulnak, kivéve a legutolsót, tehát

$$a_1!a_2!a_3!\dots a_n! < (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)! < k!.$$

Egry György János (Kölcsey Ferenc g. VIII. o. Bp. VI.)

II. Megoldás. Legyen $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s$. Ekkor $s!$ jelenti az s különböző elem permutációit.

Ha az s különböző elemet szakaszokra osztjuk, melyekben az elemek száma rendre a_1, a_2, \dots, a_n és ezen szakaszok elemeit egymás között permutáljuk, rendre $a_1!, a_2!, \dots, a_n!$ permutációit kapunk. Ha továbbá ezen különböző szakaszokból keletkező permutációkat – a sorrendjük szerint – minden lehetséges módon összekapcsoljuk, keletkezik

$$a_1! a_2! \dots a_n!$$

permutáció, melyek mindegyike benne van az s elem összes $s!$ számú permutációi között. De ezekkel nem merítettük ki az összes $s!$ számú permutációt, mert ezek között vannak olyanok is, melyek az

$$a_1!, a_2!, \dots, a_n!$$

számú permutációk sorrendjének felcserélésével keletkeztek és olyanok is, amelyekben az előbbi n szakasz valamelyikéből egyik vagy másik elemet átteszünk egy másik szakaszba és így permutálunk. Eszerint

$$a_1!a_2!\dots a_n! < (a_1 + a_2 + \dots + a_n)! < k!.$$

Sándor Gyula (Kölcsey Ferenc g. VII. o. Bp. VI.)

III. Megoldás. A csoportosítások tanában

$$P = \frac{k!}{a_1!a_2!\dots a_n!}$$

ahol $\sum_{i=1}^n a_i \leq k$, jelenti a k elemből alkotható permutációk számát, ha a k elem között a_1 , ill. a_2, \dots , ill. a_n számú

elem egyenlő, tehát P az egységénél nagyobb egész szám, még akkor is, ha $\sum_{i=1}^n a_i = k$.

Királyhídi Gyula (Szent-László g. VIII. o. Bp. X.)