Legyen $ABC\,\Delta$ a feltételeknek megfelelő. Hosszabbítsuk meg az $AB$ és $AC$ oldalakat, szerkesszük meg azon kört, mely az $\alpha$ szög szárai között fekszik és a háromszöget kívülről érinti.[1] Ezen kör $I_1$ középpontja az $\alpha$-t felező egyenesen fekszik; ha érintési pontjai az oldalakon $A_1$, $B_1$, $C_1$, akkor

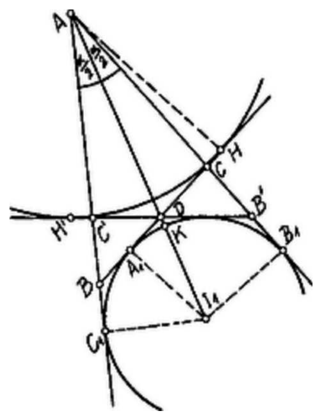
$$BA_1 = BC_1 \quad \text{és} \quad CA_1 = CB_1.$$

Minthogy $AB_1 = AC_1$ és

$$AB_1 + AC_1 = AC + CB_1 + AB + BC_1 = AC + AB + BC = 2s,$$

nyilván

$$AB_1 = AC_1 = s.$$




A $BC$ oldal az $A$ középponttal bíró és $AH = m_a$ sugarú körnek érintője, tehát közös belső érintője ezen és az $I_1$ körnek.

A szerkesztés ezek alapján ez lesz. Az $\alpha$ szög száraira felmérjük a kerület felét: $AB_1 = AC_1 = s$ távolságokat. $B_1$-ben ill. $C_1$-ben $AB_1$ ill. $AC_1$-re merőlegest emelünk. Ez az $\alpha$ felezőjét $I_1$ pontban metszi. Megrajzoljuk az $I_1$ pontból az $I_1B_1 = I_1C_1$ sugarú és az $A$ pontból az $AH$ sugarú kört. E két kör közös belső érintője lesz a $BC$ oldal tartója. (Két megoldás, az $\alpha$ felezőjére szimmetrikus helyzetben.)

Vizsgáljuk meg a szerkesztés lehetőségének feltételét. A határesetben – t. i. amikor még van az előbb meghatározott két körnek közös belső érintője – e két kör kívülről érinti egymást az $AI_1$ szögfelező és az $I_1$ kör $K$ metszéspontjában. Kell tehát, hogy $AH = m_a < AK$ legyen.

Már most

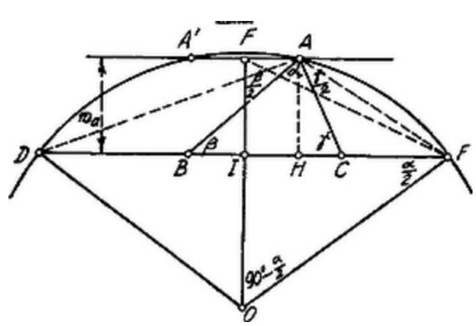
$$AK = AI_1 - KI_1 = \frac{AB_1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} - I_1B_1 = \frac{s}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} - s\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Eszerint a szerkesztés lehetőségének feltétele:

$$m_a < \frac{s\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

**II. Megoldás.** A feltételeknek megtelelő $ABC\,\Delta$ $BC$ oldalát hosszabbítsuk meg mindkét irányban és mérjük fel rá a $BD = BA$ és $CE = CA$ távolságokat. Így egy olyan $ADE\,\Delta$-et kaptunk, amely megszerkeszthető. Ugyanis

$$DE = DB + BC + CE = AB + BC + CA = 2s.$$




[1] A háromszöghöz hozzáírt kör!

A $DE$ oldalhoz tartozó magasság $AH = m_a$. Az $ABD\,\Delta$ egyenlőszárú; az $AD$ alapján fekvő szögek összege $= \beta$, tehát mindegyikük $\frac{\beta}{2}$. Hasonlóan az $ACE\,\Delta$-ben az $AE$ alapon fekvö szögek mindegyike $\frac{\gamma}{2}$. Eszerint

$$DAE\sphericalangle = \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \frac{\beta+\gamma}{2} = \alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Az $ADE\,\Delta$ $DE$ oldala oly kör húrja, amelyhez tartozó nagyobbik kerületi szög $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$; a hozzátartozó domború középponti szög $180 + \alpha$, tehát $DOE\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$ és a $DOE$ egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek mindegyike $\frac{\alpha}{2}$.

A szerkesztés menete tehát ez lesz: tetszőleges egyenesen felmérjük a $DE = 2s$ távolságot (a szerkesztendő háromszög kerületét.) Ennek végpontjaiban $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szögeket mérünk fel úgy, hogy a $DOE$ egyenlőszárú háromszög keletkezzék. Az $OD = OE$ sugárral kört szerkesztünk; ennek kisebbik ívén kell az $A$ csúcsnak feküdnie, a $DE$-től $m_a$ távolságban. $DE$-re bárhol merőlegest emelünk, e merőlegesre felmérjük az $m_a$ távolságot és ezen távolságban $DE$-vel párhuzamos $g$ egyenest húzunk. Ahol $g$ metszi az $O$ kört, ott lesz a háromszög $A$ csúcsa. Az $AD$ ill. $AE$ húrokat merőlegesen felező egyenesek $DE$-t a $B$ ill. $C$ csúcsban metszik.

$g$ egyenes az $O$ kört két pontban metszi ($A$ és $A'$); így 2 megoldást kapunk, az $OF(\perp DE)$ egyenesre szimmetrikus helyzetben: a két megoldás ugyanazon alkatrészekkel bíró háromszöget szolgáltat. Ha $g$ érinti a kört, a két megoldás összeesik. $A$ és $A'$ az $F$-be esnek és $ABC\,\Delta$ egyenlőszárú lesz.

Hogy megoldás legyen, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $m_a \leqq FI$ legyen, ahol $I$ a $DE$ felezőpontja.

Az $FIE$ derékszögű háromszögben $IE = s$,

és

$$IFE\sphericalangle = \frac{1}{2} DAE\sphericalangle = \frac{1}{2}\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\alpha}{4}.$$

Eszerint $FI = s \operatorname{cotg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)$.

A szerkesztés lehetőségének feltétele: $m_a < s \operatorname{cotg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)$.

*Holzer Pál* (Faludi Ferenc g. VIII. o. Szombathely.)

*Jegyzet.* A megoldás két feltételéből azt kell következtetnünk, hogy

$$\frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{cotg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{4}\right).$$

Ennek kimutatását az 1382. feladatban tűzzük ki.