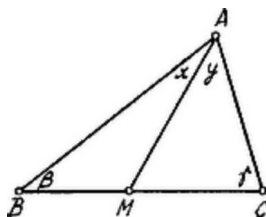


1⁰. Az ABM , ill. ACM háromszögre érvényes:

$$AM : BM = \sin \beta : \sin x, \quad AM : MC = \sin \gamma : \sin y.$$

E két aránypár megfelelő tagjait szorozva:

$$\overline{AM}^2 : \overline{BM} \cdot \overline{MC} = \sin \beta \sin \gamma : \sin x \sin y.$$



Ha azonban AM a BM és MC darabok mértani középarányosa, akkor

$$\overline{AM}^2 = BM \cdot MC \quad \text{és így} \quad \sin x \sin y = \sin \beta \sin \gamma.$$

2⁰. $x+y=\alpha$. Az 1⁰. alatti összefüggés alapján

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] = \sin \beta \sin \gamma$$

ill.

$$\cos(x-y) = 2 \sin \beta \sin \gamma + \cos(x+y) = 2 \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha.$$

Ilyen módon $x+y=\alpha$ adott összefüggésen kívül kiszámítjuk $(x-y)$ -t úgy, hogy x és y meghatározható.

3⁰.

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{esetében} \quad \cos \alpha = 0 \quad \text{és}$$

$$\cos(x-y) = 2 \sin \beta \sin \gamma = 2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right)$$

vagy

$$\cos(x-y) = 2 \sin \beta \sin \gamma = 2 \cos \gamma \sin \gamma = \sin 2\gamma = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\gamma \right)$$

és kiemeljük, hogy $|x-y|$, valamint $\left| \frac{\pi}{2} - 2\gamma \right|$ csak hegyesszög lehet.

Már most két eset lehetséges:

$$1) \quad x+y = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad x-y = \frac{\pi}{2} - 2\beta. \quad \text{Innen} \quad x = \frac{\pi}{2} - \beta = \gamma \quad \text{és} \quad y = \beta.$$

$$2) \quad x+y = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad x-y = \frac{\pi}{2} - 2\gamma. \quad \text{Innen} \quad x = \beta \quad \text{és} \quad y = \gamma.$$

Ha $x = \beta$, $y = \gamma$, az AMB és AMC háromszögek egyenlőszárúak. $BM = AM = CM$; most az M pont BC átfogó felezőpontja, a háromszög köré írható kör középpontja. Ekkor valóban: $\overline{AM}^2 = BM \cdot MC$.

Ha pedig $x = \gamma$ és $y = \beta$, az AMB és BAC háromszögek hasonlóak: $AMB \sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$. Ezen esetben AM az átfogóhoz tartozó magasság, amely valóban mértani középarányosa az átfogó két szeletének.

Cseresnyés Zoltán (Ref. g. VII. o. Debrecen).