

I. Megoldás. Vizsgáljuk az

$$y = \frac{k^2}{a^2 + x} + \frac{l^2}{b^2 + x} - 1$$

függvény változását. a, b, k, l megadott valós számok, a^2, b^2, k^2, l^2 pozitív számok. A függvény mindenütt folytonos, kivéve az $x = -a^2$ és $x = -b^2$ helyeket. Ezen helyeken a függvény értéke $\mp\infty$; ugyanis, ha $\varepsilon > 0$ és $x = -a^2 - \varepsilon$ de $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor $y \rightarrow -\infty$. Ha pedig $x = -a^2 + \varepsilon$ és $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor $y \rightarrow +\infty$.

Ugyanígy áll a dolog, ha $x = -b^2$.

Ha $x = \pm\infty$, akkor $y = -1$.

A függvény differenciálhányadosa

$$y' = -\frac{k^2}{(a^2 + x)^2} - \frac{l^2}{(b^2 + x)^2}.$$

Nyilván y' az x bármely értékénél < 0 , tehát a függvény mindenütt fogy. (Két helyen szakadása van.) A változását feltünteteti a következő táblázat:

x	$-\infty$		$-a^2$		$-b^2$		$+\infty$
y	-1	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	-1

A függvény $-a^2$ és $-b^2$ között folytonos és állandóan fogy, felvesz minden értéket $+\infty$ -tól $-\infty$ -ig. Tehát egy helyen zérussá válik.

A függvény $-b^2$ és $+\infty$ -között állandóan fogy, $+\infty$ -tól -1 -ig; kell tehát, hogy egy helyen zérus legyen.

Ezek szerint az adott egyenlet egyik gyöke $-a^2$ és $-b^2$ között, a másik $-b^2$ és $+\infty$ között van. Itt feltételeztük, hogy $-a^2 < -b^2$. Ha azonban $-b^2 < -a^2$, akkor a második gyök $-a^2$ és $+\infty$ között van.

A függvényt ábrázoló görbének az $y = -1$, $x = -a^2$, $x = -b^2$ egyenesek aszimptótái. A görbe három ágból áll; egyikén sincs tetőpontja.

Fonó András (Verbőczy g. VI. o. Bp. I.)

II. Megoldás. A törteket eltávolítva, az

$$f(x) \equiv k^2(b^2 + x) + l^2(a^2 + x) - (a^2 + x)(b^2 + x) = 0$$

egyenlethez jutunk. $f(x)$ az x oly másodfokú függvénye, melyben x^2 együtthatója -1 , tehát

$$f(+\infty) = -\infty \quad \text{és} \quad f(-\infty) = -\infty.$$

Továbbá

$$f(-a^2) = k^2(b^2 - a^2) \quad \text{és} \quad f(-b^2) = l^2(a^2 - b^2)$$

Látjuk tehát, hogy $f(-a^2)$ és $f(-b^2)$ ellenkező előjelűek, azaz az $f(x) = 0$ egyik gyöke $-a^2$ és $-b^2$ között van.

$f(-a^2)$ és $f(-b^2)$ egyike pozitív; ha $b^2 > a^2$, akkor $f(-a^2) > 0$, tehát a másik gyök $-a^2$ és $+\infty$ között van.

Ha pedig $a^2 > b^2$, akkor $f(-b^2) > 0$; ezen esetben a másik gyök $-b^2$ és $+\infty$ között van.

A második gyökre nézve is kijelölhetünk egy véges intervallumot. Minthogy az $f(x) = 0$ egyenletre nézve a gyökök összege

$$x_1 + x_2 = k^2 + l^2 - a^2 - b^2,$$

akkor, ha az egyik $-a^2$ és $-b^2$ között van, a másik gyök

$$k^2 + l^2 - a^2 \quad \text{és} \quad k^2 + l^2 - b^2$$

között lesz. Valóban, a függvény az utóbbi két helyen ellenkező előjelű:

$$f(k^2 + l^2 - a^2) = l^2(a^2 - b^2) \quad \text{és} \quad f(k^2 + l^2 - b^2) = k^2(b^2 - a^2).$$

Grosz László (Balassi Bálint g. VII. o. Balassagyarmat.)

Jegyzet. Az $f(x)$ discriminánsa

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv [(a^2 + b^2) - (k^2 + l^2)]^2 - 4a^2b^2 + 4k^2b^2 + 4l^2a^2 = \\ &= (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(k^2 + l^2) + (k^2 + l^2)^2 - 4a^2b^2 + 4k^2b^2 + 4l^2a^2 = \\ &= (a^2 - b^2)^2 - 2(a^2 - b^2)(k^2 - l^2) + (k^2 - l^2)^2 + 4k^2l^2 = \\ &= [(a^2 - b^2) + (k^2 - l^2)]^2 + 4k^2l^2. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy $\Delta > 0$ és ezért az $f(x) = 0$ egyenletnek két különböző valós gyöke van.

Azonban a feladat megoldásánál nincs szükségünk a discrimináns vizsgálatára.