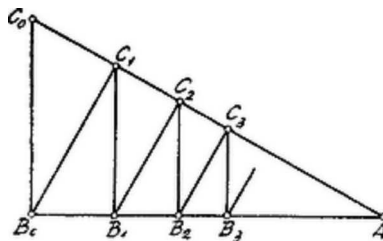


1⁰. Vizsgáljuk a $C_0B_0C_1B_1C_2B_2 \dots C_iB_i \dots$ törtvonal részeit és ezeket fejezzük ki C_0B_0 (ill. B_0C_0) és α segítségével.



$$I. \begin{cases} B_0C_1 = B_0C_0 \cos \alpha, & B_1C_1 = B_0C_1 \cos \alpha = B_0C_0 \cos^2 \alpha \\ B_1C_2 = B_0C_0 \cos^3 \alpha, & B_2C_2 = B_0C_1 \cos^4 \alpha \text{ s. í. t.} \end{cases}$$

Eszerint $B_0C_0, B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_iC_i, \dots$ oly mértani sort alkotnak, melynek első tagja B_0C_0 , hányadosa $\cos^2 \alpha$ és $0 < \cos^2 \alpha < 1$. Tehát

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0} B_iC_i &= \frac{B_0C_0}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{B_0C_0}{\sin^2 \alpha} = \frac{B_0C_0 \cdot AC_0^2}{B_0C_0^2} = \\ &= AC_0 \cdot \frac{AC_0}{B_0C_0} = AC_0 \operatorname{cosec} \alpha. \end{aligned}$$

4⁰. Ugyancsak az I. alatti sor tagjai között szerepelnek $B_0C_1, B_1C_2, \dots$, s. í. t. Ezek oly mértani sort alkotnak, melynek első tagja $B_0C_1 = B_0C_0 \cos \alpha$ és hányadosa $\cos^2 \alpha$, úgy hogy

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0} C_{i+1}B_i = \frac{B_0C_0 \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = AC_0 \cos \alpha \operatorname{cosec} \alpha = AC_0 \cot \alpha = AB_0 \cos \alpha.$$

2⁰. $AB_0 = B_0C_0 \cot \alpha$, $AB_1 = B_1C_1 \cot \alpha = B_0C_0 \cos^2 \alpha \cot \alpha$, $AB_2 = B_2C_2 \cot \alpha = B_0C_0 \cos^4 \alpha \cot \alpha$, s. í. t. Az AB_i távolságok mértani sorának első tagja $B_0C_0 \cot \alpha$, hányadosa $\cos^2 \alpha$; így

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0} AB_i = \frac{B_0C_0 \cot \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{AB_0}{\sin^2 \alpha} = AB_0 \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

3⁰. Az $AC_0, AC_1, AC_2, \dots, AC_i$ sor tagjai: $AC_0 = \frac{B_0C_0}{\sin \alpha}$.

$$\begin{aligned} AC_1 &= B_0C_1 \cot \alpha = B_0C_0 \cos \alpha \cot \alpha = \frac{B_0C_0}{\sin \alpha} \cos^2 \alpha, \\ AC_2 &= B_1C_2 \cot \alpha = B_0C_0 \cos^3 \alpha \cot \alpha = \frac{B_0C_0}{\sin \alpha} \cos^4 \alpha \text{ s. í. t.} \end{aligned}$$

Eszerint most oly mértani sorral van dolgunk, mely az 1⁰-ból keletkezik, ha annak tagjait $\frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$ -val szorozzuk; tehát

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0} AC_i = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0} B_iC_i \right) \operatorname{cosec} \alpha = AC_0 \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

A 4 végtelen sor összege rendre:

$$AC_0 \operatorname{cosec} \alpha, \quad AB_0 \operatorname{cosec}^2 \alpha, \quad AC_0 \operatorname{cosec}^2 \alpha, \quad AB_0 \cos \alpha.$$

Katter Herbert (Bencés g. VIII. o. Sopron)