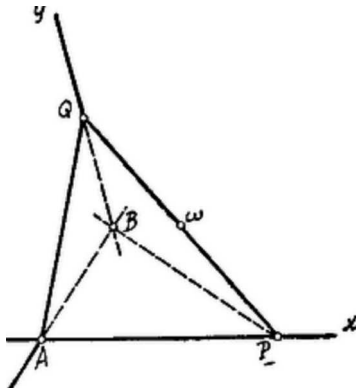


1⁰. A $PABQ$ tetraéder alapjának tekintsük az A -nál derékszögű PAB háromszöget. Minthogy $BQ \perp BA$ és $BQ \perp AP$, azért BQ merőleges a PAB síkra és így BQ a PAB alaphoz tartozó magasság. Eszerint a tetraéder térfogata

$$V = \frac{1}{2}AB \cdot AP \cdot \frac{1}{3}BQ = a \cdot x \cdot \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}axy = \frac{1}{3}ak^2$$

azaz V értéke állandóan ugyanakkora.



2⁰. Ha az A csúcs távolsága a PBQ laptól h , akkor

$$V = \frac{1}{3}ht_{PBQ}$$

Láttuk, hogy $BQ \perp [PAB]$, tehát $BQ \perp BP$, azaz: a $PBQ \Delta$ B -nél derékszögű és így

$$t_{PBQ} = \frac{1}{2}BQ \cdot BP = \frac{1}{2}y\sqrt{AB^2 + AP^2} = \frac{1}{2}y\sqrt{4a^2 + x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2y^2 + k^4}.$$

$$V = \frac{1}{6}h\sqrt{4a^2y^2 + k^4}, \text{ innen } h = \frac{6V}{\sqrt{4a^2y^2 + k^4}} = \frac{2ak^2}{\sqrt{4a^2y^2 + k^4}}.$$

3⁰. $AP \perp AB$ és $AP \perp BQ$, tehát $AP \perp [ABQ]$, ill. $AP \perp AQ$. Eszerint PQ közös átfogója a B -nél derékszögű PBQ és az A -nál derékszögű PAQ háromszögeknek. Ezért PQ felezőpontja ω , egyenlő távolságban van P , Q , A , B pontoktól, tehát a tetraéder köré írt gömb középpontja. E gömb átmérője PQ és

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BQ}^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 = \\ &= 4a^2 + (x - y)^2 + 2xy = 4a^2 + 2k^2 + (x - y)^2 \end{aligned}$$

A PQ gömbátmérő minimum, ha $(x - y)^2 = 0$, azaz, ha $x = y = k$.

Jónás Emil (Balassi Bálint g. VIII. o. Balassagyarmat)