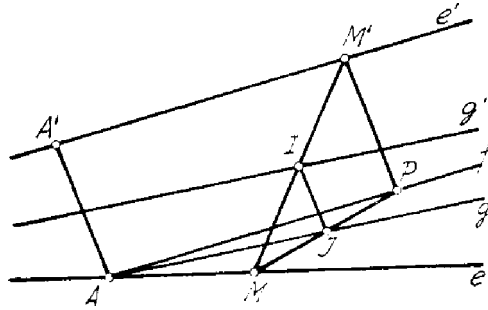


I. Megoldás. Az M' pontból húzzuk meg $M'P$ -t úgy, hogy $M'P \# A'A$ legyen. (A párhuzamosság ugyanolyan irányú is legyen). Ekkor $A'M'PA$ paralelogramma, azaz $AP \# A'M'$, tehát a P pont az e' -vel párhuzamos és A ponton átmenő f egyenest írja le. Minthogy most $\frac{AM}{AP} = k$, az MP iránya mindig ugyanaz és így az MP felezőpontja J , az A ponton átmenő g egyenest írja le.



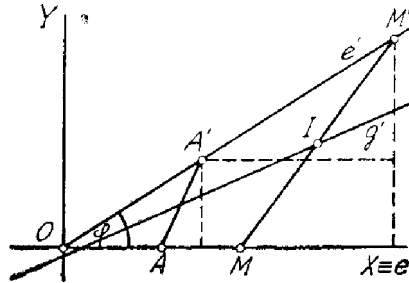
Legyen I az MM' felezőpontja, tehát $JI \parallel PM'$ és $JI = \frac{1}{2}PM' = \frac{1}{2}AA'$.

Eszerint JI nagyságra nézve állandó, irányra nézve pedig PM' ill. AA' irányával egyezik meg. Tehát az I pont mértani helye azon g' egyenes, mely párhuzamos g -vel és AA' -t felezi.

Jegyzet. Néhány dolgozatban azon állítás, ill. következtetés foglaltatik, hogy az I pont mértani helye, a g' egyenes kerestülmege az e és e' egyenesek O metszőpontján. Egyszerű meggondolás alapján mondhatjuk, hogy ez általában lehetetlen; ha ugyanis O valamely MM' távolság felezőpontja, akkor M' az MO egyenes mentén kell, hogy fekszen, tehát M' is az e -nek pontja. Eszerint: O csak abban az esetben lehet az I mértani helyének pontja, ha M és M' összeesik az O -ban, azaz k oly értéke mellett, amellyel $\frac{AO}{A'O} = k$. (Ez a helyzet a g -re nézve!) Ekkor az összes MM' távolságok párhuzamosak!

Minthogy a beérkezett dolgozatok a feladatot analitikai úton tárgyalják, ilyen megoldást is közlünk.

II. Megoldás. Derékszögű koordináta-rendszerünk X tengelye legyen az e egyenes, kezdőpontja az e és e' egyenesek O metszőpontja. Az e' egyenes hajlásszöge az X tengelyhez legyen φ .



Az A pont koordinátái: $(a, 0)$. Az M ponté: $(a + \lambda, 0)$, ahol $\lambda = AM$ felvehet minden értéket $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig.

Az A' pont koordinátái $(a', a'\text{tg}\varphi)$.

Minthogy $A'M' = \frac{AM}{k} = q \cdot AM^1 = q\lambda$,

az M' pont koordinátái: $(a' + q\lambda \cos \varphi, a'\text{tg}\varphi + q\lambda \sin \varphi)$.

Az MM' távolság I felezőpontjának koordinátái:

$$\xi = \frac{a + \lambda + a' + q\lambda \cos \varphi}{2}, \quad \eta = \frac{a'\text{tg}\varphi + q\lambda \sin \varphi}{2}.$$

Amint látjuk, (ξ, η) a λ paraméter elsőfokú függvényei. Ha $\lambda = 0$, $\xi = \frac{a + a'}{2}$, $\eta = \frac{a'\text{tg}\varphi}{2}$. Ezen koordináták az AA' távolság felező pontját határozzák meg: ezen pont a mértani helyhez tartozik.

Hogy ξ és η között nyerjünk összefüggést, λ -t ki kell küszöbölnünk.

Írhatjuk:

$$2\xi - a - a' = \lambda(1 + q \cos \varphi), \quad 2\eta - a'\text{tg}\varphi = \lambda q \sin \varphi,$$

tehát

$$\frac{2\eta - a'\text{tg}\varphi}{2\xi - a - a'} = \frac{q \sin \varphi}{1 + q \cos \varphi} \text{ ill. } 2\eta - a'\text{tg}\varphi = \frac{q \sin \varphi}{1 + q \cos \varphi} (2\xi - a - a').$$

¹ $\frac{1}{k} = q$ helyettesítés tört kikerülése céljából. Éppen így írhattuk volna: $A'M' = k \cdot AM$.

Ha már most (ξ, η) helyett (x, y) -t írunk, a keresett mértani hely egyenlete:

$$2y - a' \operatorname{tg} \varphi = \frac{q \sin \varphi}{1 + \cos \varphi} (2x - a - a'),$$

tehát egyenes egyenlete.²

Ezen egyenes általában nem megy keresztül az origon, az e és e' egyenes metszéspontján. $x = 0, y = 0$ csak akkor pontja az egyenesnek, ha

$$-a' \operatorname{tg} \varphi = -\frac{q \sin \varphi}{1 + q \cos \varphi} (a + a'), \text{ vagyis } a'(1 + q \cos \varphi) = (a + a')q \cos \varphi$$

tehát, ha

$$\frac{a'}{\cos \varphi} = qa.$$

Azonban $\frac{a'}{\cos \varphi} = OA', a = OA$, azaz $OA' = qOA = \frac{OA}{k}$,

ill.

$$\frac{OA}{OA'} = k.$$

Ez megegyezik azzal, amit az I. megoldáshoz fűzött jegyzetünkben fejeztünk ki.

² Ha $x = \frac{a + a'}{2}$, akkor $y = \frac{a' \operatorname{tg} \varphi}{2}$. Az egyenes keresztülmegy AA' felező pontján.