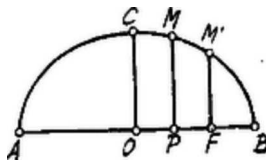


Az ellipszis egyenlete, főtengelyeire vonatkoztatva:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Az ellipszis nagy tengelye $AB = 2a$. Az F gyújtópont az ellipszis M' pontjának vetülete és $OF = c$. A szóbanforgó kúp térfogata

$$V = \frac{\pi}{3} \overline{MP}^2 \cdot PF = \pm \frac{\pi}{3} y^2 (c - x).$$

A $+$ előjel érvényes, ha M az $A(-a, 0)$ ponttól az M' pontig mozog, tehát $-a \leq x \leq c$; azonban a $-$ előjel veendő, ha M az M' -től a B ig mozog, azaz $c < x \leq a$.

Minthogy M az ellipszis pontja, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Így

$$V = \pm \frac{\pi}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)(c - x).$$

Amint látjuk

$$V = 0, \quad \text{ha } x = \pm a \quad \text{és ha } x = c.$$

Ha $x = \pm a$, akkor a kúp alapja, ha $x = c$, a kúp magassága válik zérussá. (Ha $x = \pm a$, a kúp egyenes vonaldarabbá zsugorodik össze, ha $x = c$, a kúp egy kör területébe megy át.)

V az x -nek folytonos függvénye és pozitív úgy a $(-a, c)$, mint a $(c, +a)$ intervallumban. Kell tehát, hogy ezen közökben legalább egy-egy maximuma legyen. Ha

$$f(x) = \pm(a^2 - x^2)(c - x),$$

akkor

$$f'(x) = \pm(3x^2 - 2cx - a^2)$$

$f(x)$ -nek és így V -nek csak ott lehet maximuma, ahol

$$g(x) = 3x^2 - 2cx - a^2 = 0, \quad \text{tehát } x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 3a^2}}{3}.$$

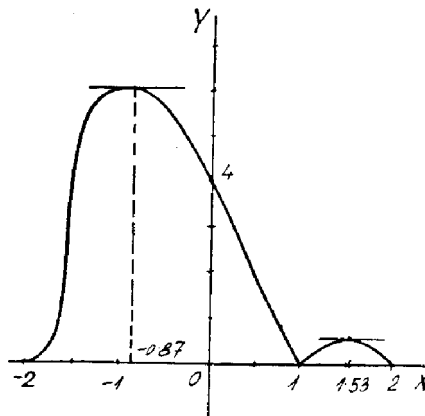
Ezen egyenletnek két valós, ellenkező előjelű gyöke van. Minthogy

$$g'(-a) = 3a^2 + 2ac - a^2 = 2a(a + c) > 0$$

$$g'(c) = 3c^2 - 2c^2 - a^2 = c^2 - a^2 < 0 \quad (\text{mert } c < a)$$

$$g'(a) = 3a^2 - 2ac - a^2 = 2a(a - c) > 0,$$

az egyik gyök $-a$ és c , a másik c és $+a$ között van.



Eszerint V értékének változását jellemző táblázat:

x	$-a$		x_1		c		x_2		$+a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\max.$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\max.$	$\searrow$	0

Így

$$x_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 + 3a^2}}{3}, \quad x_2 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 3a^2}}{3}$$