

I. Megoldás. Stewart-tételével (l. Xlll. évf. 193. o. — azaz 1937/3 193. old.)

$$(1) \quad \begin{aligned} \overline{CE}^2 \cdot c &= a^2 \cdot \overline{AE} + b^2 \cdot \overline{EB} - \overline{AE} \cdot \overline{EB} \cdot c \\ \overline{CE}^2 &= a^2 \cdot \frac{AE}{c} + b^2 \frac{EB}{c} - \overline{AE} \cdot \overline{EB} \dots \end{aligned}$$

ahol $c = AB$. Feltevésünk szerint

$$AE : c = n : (m + n) \quad \text{és} \quad EB : c = m : (m + n).$$

Tekintettel ezekre, 1)-ből keletkezik:

$$\begin{aligned}\overline{CE}^2 &= \frac{na^2}{m+n} + \frac{mb^2}{m+n} - \frac{mnc^2}{(m+n)^2} = \frac{(na^2 + mb^2)(m+n) - mnc^2}{(m+n)^2} = \\ &= \frac{n^2a^2 + m^2b^2 + mn(a^2 + b^2 - c^2)}{(m+n)^2} = \frac{(na + mb)^2 + mn(a^2 - 2ab + b^2 - c^2)}{(m+n)^2} = \\ &= \left(\frac{na + mb}{m+n}\right)^2 - \frac{mn}{(m+n)^2}[c^2 - (a-b)^2].\end{aligned}$$

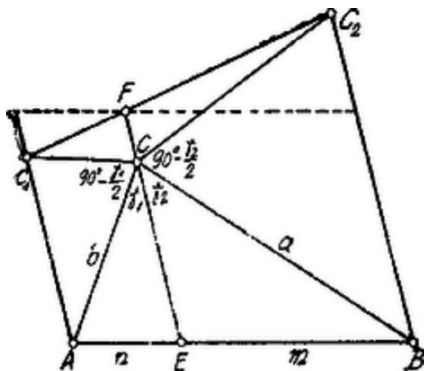
Minthogy a, b, c egy háromszög oldalai, $c^2 > (a - b)^2$, úgy hogy

$$\frac{mn}{(m+n)^2} [c^2 - (a-b)^2] > 0$$

$$\text{tehát} \quad \overline{CE}^2 < \left(\frac{na + mb}{m + n} \right)^2 \quad \text{azaz} \quad CE < \frac{na + mb}{m + n}.$$

Czinczenheim József (Izr. g. VIII. o. Debreen).

II. Megoldás. Húzzunk az A és B pontokon keresztül CE -vel párhuzamosokat, ábránk szerint; az előbbire mérjük fel $AC_1 = AC = b$, az utóbbira $BC_2 = BC = a$ távolságokat. Legyen már most $ACE \sphericalangle = \gamma_1$, $BCE \sphericalangle = \gamma_2$, $(\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma)$.



Minthogy $AC_1 \parallel CE$, a CAC_1 egyenlőszárú háromszögben $CAC_1 \sphericalangle = \gamma_1$; a $CBC_2 \Delta$ -ben $CBC_2 \sphericalangle = \gamma_2$. Ebből következik, hogy

$$ACC_1 \triangleleft = 90^\circ - \frac{\gamma_1}{2}, \quad BCC_2 \triangleleft = 90^\circ - \frac{\gamma_2}{2}.$$

Ha CC_1 -t a C körül pozitív irányban forgatjuk, míg a CC_2 helyzetbe kerül, a forgást domború szög méri, t. i.

$$\begin{aligned} C_1CA_{\triangleleft} + ACB_{\triangleleft} + BCC_2_{\triangleleft} &= \\ &= 90^\circ - \frac{\gamma_1}{2} + \gamma + 90^\circ - \frac{\gamma_2}{2} = \\ &= 180^\circ + \gamma - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 180^\circ + \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az ABC_2CC_1 konkáv ötszög C_1C_2 átlója az ötszöget nem hasítja, ill. a C pont az ABC_2C_1 trapézén belül fekszik.

Hosszabbítsuk meg CE -t amíg C_1C_2 -t az F pontban metszi, tehát $FE > CE$. A párhuzamos szelők törvényéből folyik, hogy

$$\frac{a - FE}{FE - b} \quad \text{és innen} \quad FE = \frac{na + mb}{m + n} > CE.$$