

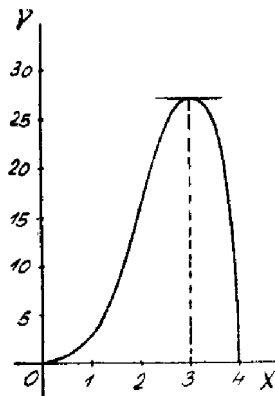
Független változónak tekintsük az egyenlőszárú háromszög magasságát; ezt jelölje  $x$ . Ha  $R$  a kör sugara,  $0 \leq x \leq 2R$ . A háromszög alapjának fele:  $x$  és  $(2R - x)$  mértani középárányosa és így a háromszög területe

$$y = x\sqrt{x(2R - x)} = \sqrt{x^3(2R - x)}.$$

Nyilvánvaló, hogy  $y$  csak akkor valós, ha  $0 \leq x \leq 2R$ . Elegendő tehát, ha ezen közben az

$$f(x) = x^3(2R - x) = -x^4 + 2Rx^3$$

függvény változását vizsgáljuk.



$f(x) = 0$  (és  $y = 0$ ), ha  $x = 0$  és ha  $x = 2R$ . Ezen közben  $f(x)$  mindenütt folytonos és pozitív; kell tehát, hogy ezen közben legalább egy maximuma legyen. Minthogy

$$f'(x) = -4x^3 + 6Rx^2 = 2x^2(3R - 2x) = 0,$$

ha  $x = 0$  és ha  $x = \frac{3R}{2}$ , az  $x = \frac{3R}{2}$  helyen  $f(x)$  függvénynek (és  $y$ -nak) maximuma van. Ezen helyen  $f'(x)$  pozitív értékekből negatív értékekbe megy át,  $f(x)$  változását tehát a következő táblázat jellemzi:

|         |   |   |                                                      |   |      |
|---------|---|---|------------------------------------------------------|---|------|
| $x$     | 0 |   | $\frac{3}{2} R$                                      |   | $2R$ |
| $f'(x)$ | 0 | + | 0                                                    | − | −    |
| $f(x)$  | 0 | → | $\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^3 R^4$<br>max. | → | 0    |

Eszerint  $y$  ill.  $a^2$  legnagyobb értéke:  $\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^3 R^4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$ . Ez a körbe írt egyenlőoldaltú háromszög területe.

$y$  minden értéket, mely 0 és  $\frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$  között van, kétszer vesz fel: egyszer a növekedés, egyszer a csökkenés közben.

Ebből következik, hogy ha  $a^2 \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$ , az

$$x\sqrt{x(2R - x)} = a^2 \quad \text{ill.} \quad x^3(2R - x) = a^4$$

egyenletnek két valós, pozitív megoldása van.

*Kiegészítés.* Az  $f(x) = x^3(2R - x)$  függvénynek az  $x = 0$  helyen inflexiós pontja van.  $f(x) < 0$ , ha  $x < 0$  vagy ha  $x > 2R$ . Nyilvánvaló tehát, hogy, mivel  $a^4 > 0$ , az  $f(x) = a^4$  egyenletnek nem lehet oly valós megoldása, amely szerint  $x < 0$  vagy  $x > 2R$ .

Az

$$x^3(2R - x) = a^4 \quad \text{ill.} \quad g(x) \equiv x^4 - 2Rx^3 + a^4 = 0$$

egyenletnek a Descartes-féle jelszabály szerint legfeljebb két pozitív gyöke lehet. Ezek egyike 0 és  $\frac{3}{2}R$ , másik  $\frac{3}{2}R$  és  $2R$  között van, ha  $a^2 < \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$ .

Ugyanis

$$g(0) = a^4 > 0, \quad g\left(\frac{3}{2}R\right) = \left(\frac{3}{2}R\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 R^4 + a^4 = a^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3 R^4 < 0.$$

és

$$g(2R) = 16R^4 - 16R^4 + a^4 > 0.$$